

Luiz Roberto Dante
Fernando Viana

MANUAL DO
PROFESSOR

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO –
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO

CÓDIGO DA COLEÇÃO:
0159P21202

CÓDIGO DA OBRA:
0159P21202134

ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS • ENSINO MÉDIO

matemática em contexto

Função afim e
função quadrática

ea

editora ática

ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS • ENSINO MÉDIO

Matemática em contextos

Função afim e função quadrática

Luiz Roberto Dante

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp-SP, Rio Claro)

Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)

Doutor em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Livre-docente em Educação Matemática pela Unesp-SP, Rio Claro

Ex-professor do Ensino Fundamental e do Ensino Médio na rede pública de ensino de São Paulo

Autor de livros didáticos e paradidáticos de Matemática para alunos e professores da Educação Básica

Fernando Viana

Licenciado e mestre em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Doutor em Engenharia Mecânica pela UFPB

Professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB)

Professor do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e de cursos pré-vestibulares há mais de 20 anos

Autor de obras didáticas de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

MANUAL DO
PROFESSOR

ea

editora ática

1ª edição, São Paulo, 2020



editora ática

Presidência: Paulo Serino

Direção editorial: Lauri Cericato

Gestão de projeto editorial: Heloisa Pimentel

Coordenação de área: Marcela Maris e Juliana Grassmann dos Santos

Edição: Marina Muniz Campelo, Rodrigo Macena,
Alessandra Maria Rodrigues da Silva, César Augusto Moraes de Souza,
Igor Nóbrega, Nadili L. Ribeiro, Pamela Hellebrekers Seravalli e
Rani de Oliveira e Souza

Planejamento e controle de produção: Vilma Rossi e Camila Cunha

Revisão: Rosângela Muricy (coord.), Alexandra Costa da Fonseca,
Ana Paula C. Malfa, Ana Maria Herrera, Carlos Eduardo Sigris,
Flavia S. Vênezio, Heloisa Schiavo, Hires Heglan, Kátia S. Lopes Godoi,
Luciana B. Azevedo, Luis M. Boa Nova, Luiz Gustavo Bazana,
Patrícia Cordeiro, Patrícia Travanca, Paula T. de Jesus,
Sandra Fernandez e Sueli Bossi

Arte: Claudio Faustino (ger.), Erika Tiemi Yamauchi (coord.),
Alexandre Miasato Uehara e Renato Akira dos Santos (edição de arte),
WYM Design (diagramação)

Iconografia e tratamento de imagens: Roberto Silva (coord.),
Mariana Sampaio (pesquisa iconográfica), Cesar Wolf (tratamento de imagens)

Licenciamento de conteúdos de terceiros: Fernanda Carvalho (coord.),
Erika Ramires e Márcio Henrique (analistas adm.)

Ilustrações: Paulo Manzi, Tiago Donizete Leme e WYM Design

Cartografia: Mouses Sagiorato

Design: Luis Vassallo (proj. gráfico, capa e Manual do Professor)

Todos os direitos reservados por Editora Ática S.A.

Avenida Paulista, 901, 4º andar
Jardins – São Paulo – SP – CEP 01310-200
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
atendimento@aticascipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Dante, Luiz Roberto
Matemática em contextos : função afim e função quadrática
/ Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo
: Ática, 2020.

Suplementado pelo manual do professor
Bibliografia
ISBN 978-65-5767-038-5 (aluno)
ISBN 978-65-5767-039-2 (professor)

1. Matemática e suas Tecnologias (Ensino Médio) 2.
Matemática (Ensino Médio) 3. Funções (Matemática) 4. Função
afim 5. Função quadrática I. Viana, Fernando II. Título.

20-2806

CDD 510.7

Angélica Ilacqua - CRB-8/7057

2020

Código da obra CL 713839

CAE 729703 (AL) / 729705 (PR)

1ª edição

1ª impressão

De acordo com a BNCC.



Enviamos nossos melhores esforços para localizar e indicar adequadamente os créditos dos textos e imagens presentes nesta obra didática. Colocamos-nos à disposição para avaliação de eventuais irregularidades ou omissões de créditos e consequente correção nas próximas edições. As imagens e os textos constantes nesta obra que, eventualmente, reproduzam algum tipo de material de publicidade ou propaganda, ou a ele façam alusão, são aplicados para fins didáticos e não representam recomendação ou incentivo ao consumo.

Impressão e acabamento

Apresentação

Caro estudante,

Ao elaborar esta coleção de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, observamos o que há de mais moderno no processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento.

Nosso objetivo com esta coleção é proporcionar a você condições para que possa compreender e aplicar as principais ideias e ferramentas da Matemática em seu nível de ensino, atribuindo significados e possibilitando a resolução de problemas do mundo real. Além disso, a coleção foi concebida de modo a dar espaço para que você seja protagonista do próprio processo de aprendizagem, desenvolvendo uma educação integral.

Todos os conceitos essenciais, próprios do Ensino Médio, foram explorados ao longo dos volumes de maneira simples, intuitiva e compreensível. As resoluções mecanizadas e o formalismo excessivo foram evitados; mantivemos, porém, o rigor necessário, coerente com o nível para o qual a coleção é proposta.

Na abertura de cada capítulo, apresentamos uma imagem relacionada aos conteúdos que o compõem, com o objetivo de lhe dar uma percepção de alguns dos temas que serão estudados. Esperamos que isso instigue sua curiosidade!

Em seguida, você encontra situações contextualizadas e, muitas vezes, integradas, que também exprimem os conteúdos e temas. Nelas você pode observar e investigar a utilização da Matemática de maneira simples, espontânea e eficiente, além de refletir sobre ela.

No decorrer de cada capítulo, apresentamos textos e atividades significativos, que abordam fatos históricos e contextualizam a construção dos conteúdos que estão sendo estudados, bem como expõem e promovem a resolução de problemas relacionados a situações reais ou a outras áreas do conhecimento, exploram as tecnologias digitais – tão presentes em nossa vida – e propiciam o desenvolvimento do pensamento computacional.

Desse modo, a coleção como um todo engloba todas as competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como as competências específicas e as habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias que estão previstas para o Ensino Médio.

Sugestões e críticas que visem ao aprimoramento deste trabalho serão sempre consideradas. Seja muito bem-vindo ao estudo da Matemática e suas Tecnologias que esta coleção lhe proporciona!

Os autores

Conheça seu livro

Este volume está organizado em 2 capítulos. Nele você encontrará textos, boxes e seções. Conheça a seguir a estrutura deste volume.

Na primeira página da **abertura** de cada capítulo, mostramos uma imagem relacionada a um ou mais conteúdos ou temas abordados nele. Os textos apresentados nas demais páginas da abertura são acompanhados de perguntas que propõem reflexões sobre os assuntos do capítulo e buscam introduzir, direta ou indiretamente, os conteúdos que serão estudados.



CONHEÇA O CAPÍTULO

Objetivos

- Investigar diferentes situações reais que podem ser modeladas por funções quadráticas.
- Construir modelos utilizando funções quadráticas para resolver problemas em diferentes contextos.
- Explorar a ideia de função quadrática e algumas propriedades dela.
- Conhecer como o estudo de funções quadráticas se iniciou por meio da história da Matemática.
- Utilizar tecnologias digitais para explorar e analisar os temas da função quadrática.
- Utilizar o conceito de raízes de equações de 2º grau para encontrar modelos e resolver problemas.
- Construir um fluxograma para modelar uma situação e indicar a solução para o problema.
- Investigar diferentes situações reais analisando gráficos de funções quadráticas no plano cartesiano.
- Explorar a parábola e as propriedades geométricas dela.
- Construir, explorar e analisar o gráfico de funções quadráticas, utilizando os nós tecnológicos digitais.
- Explorar a relação entre parábolas e catábolas no contexto físico.
- Construir representações algébricas de funções quadráticas em representações gráficas e vice-versa.
- Analisar funções quadráticas em que uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra.
- Investigar radicantes A , B e C e o discriminante Δ .
- Compreender o que é vértice da parábola e investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas.

Justificativa

Assim como com funções afins, o radiança com funções quadráticas – em especial o estudo dos zeros e dos pontos de máximo e de mínimo – é importante em diversos contextos da Matemática, da Física, da Química, da Biologia, da Engenharia e de outras situações do cotidiano. Portanto, ao estudar as funções quadráticas como um dos pontos de partida para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, os estudantes têm a oportunidade de aprofundar a compreensão de conceitos matemáticos, permitindo que possam aplicar esses conhecimentos em situações reais.

Para essa exploração de tópicos, é necessária a compreensão dos significados atribuídos às funções quadráticas e às representações gráficas dessas funções, além da compreensão do papel dos coeficientes da equação relacionada a uma função quadrática.

A BNCC

No decorrer do capítulo, apresentamos o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica, bem como as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias, bem como as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias de acordo com o currículo de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio. Também apresentamos as competências transversais e as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias de acordo com o currículo de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio.

Competências gerais (BNCC, 2018)

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias (BNCC, 2018)

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias (BNCC, 2018)

Competências transversais (BNCC, 2018)

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias (BNCC, 2018)

No **Conheça o capítulo**, apresentamos os objetivos que devem ser atingidos no decorrer do capítulo e a justificativa de pertinência deles. Além disso, indicamos as competências gerais da Educação Básica, bem como as competências específicas e as habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da etapa do Ensino Médio, cujo desenvolvimento é favorecido no capítulo, e os temas contemporâneos transversais presentes nele. Consulte as páginas 130 a 134 para saber mais da BNCC e ler o descritivo das competências gerais, assim como o descritivo das competências específicas e das habilidades favorecidas neste volume.

Análise algébrica e gráfica da função quadrática

Situação 1

Salto na natureza

Você sabia que muitas espécies de aves, répteis e mamíferos, assim como insetos, possuem uma habilidade incrível: saltar uma distância consideravelmente maior do que a própria medida de comprimento do corpo? É o caso do *Amphispiza bilineata*, uma espécie de pássaro que tem 6 cm de medida de comprimento, mas alcança uma medida de distância de 40 cm a partir do ponto de partida. Essa habilidade é muito interessante e pode ser estudada por meio da matemática.

Os saltos desses animais podem ser modelados por **funções quadráticas**. Se pudermos descrever no ar a trajetória do salto, veremos parte de uma **parábola**, que é o nome da representação gráfica dessas funções.

Considere uma ave que salta a uma distância de 2 metros de medida de distância. A medida de comprimento da altura máxima que essa ave alcança durante o salto é 1 metro. Observe o gráfico no plano cartesiano que ilustra esse salto.

1. Quantos metros a ave saltou, na horizontal, até alcançar o ponto mais alto da trajetória?

2. A lei da função quadrática que modela esse salto é $f(x) = -x^2 + 2x$. Quais são os zeros dessa função?

3. Compare o resultado obtido na item anterior com o gráfico da função. Você consegue ver alguma relação?

No início de cada tópico dos capítulos, você encontra algumas situações e questões relacionadas a elas que permitem investigações e explorações e que o preparam para os conteúdos do tópico.

No **Explore para descobrir**, indicamos atividades de exploração, experimentação, verificação e sistematização dos conteúdos apresentados, possibilitando que você formule ideias e crie estratégias.

Explorando a ideia de função quadrática

Você já viu, no Ensino Fundamental, que o número de diagonais em um polígono convexo depende do número n de lados desse polígono. Vamos relemborar.

Figura aberta

Um polígono convexo é um polígono de n lados, onde todos os ângulos internos são menores que 180 graus.

Explore para descobrir

- Quantas diagonais tem:
 - um triângulo?
 - um quadrado?
 - um pentágono?
 - um hexágono?
 - um heptágono?
 - um octógono?
 - um nonágono?
 - um decágono?
 - um undecágono?
 - um dodecágono?
- Quantas diagonais tem um polígono convexo de n lados?
 - um triângulo?
 - um quadrado?
 - um pentágono?
 - um hexágono?
 - um heptágono?
 - um octógono?
 - um nonágono?
 - um decágono?
 - um undecágono?
 - um dodecágono?
- Se um polígono convexo de n lados, se multiplicarmos o número de diagonais por n , o resultado é o mesmo que o número de diagonais desse polígono? Se sim, justifique. Caso contrário, indique como obter o número de diagonais de um polígono convexo de n lados.
- Teste a expressão obtida na atividade anterior com os valores obtidos na atividade 1, observando os valores de $d(n)$, $d(n) \cdot n$ e $d(n) \cdot n$, respondendo a função de $d(n)$ por n .

A expressão que relaciona o número d de diagonais em um polígono convexo com o número n de lados desse polígono é a lei da **função quadrática** dada por:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2}$$

onde n é um número natural maior do que zero e $n \geq 3$.

Figura aberta

Seja n , o número de lados de um polígono convexo de n lados.

As situações apresentadas nas páginas 78 e 79 tornaram-se modeladas por funções quadráticas, mostrando que modelamos um fenômeno físico.

6

Sumário

Capítulo 1: Função afim	8	Capítulo 2: Função quadrática	74
A ideia de função	12	A função quadrática	78
Explorando a ideia de função	14	Explorando a ideia de função quadrática	80
Formalizando a ideia de função	17	Formalizando o conceito de função quadrática	81
A função afim	20	Leitura e compreensão	83
Um pouco da história das funções afins	21	Zeros de uma função quadrática	84
Explorando a função afim	22	Explorando as raízes de uma equação de 2º grau	86
Formalizando a definição de função afim	23	Tecnologias digitais	87
Valor de uma função afim	24	Formalizando o conceito de zeros de uma função quadrática	88
Taxa de variação média da função afim	28	Tecnologias digitais	95
Gráfico de funções	31	Análise algébrica e gráfica da função quadrática	97
Tecnologias digitais	32	Gráfico da função quadrática	99
Gráfico da função afim	36	Tecnologias digitais	101
Tecnologias digitais	37	Construção do gráfico de uma função quadrática	104
Leitura e compreensão	43	Conexões	113
Além da sala de aula	45	Vértice da parábola, conjunto imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática	115
Função linear e proporcionalidade	47	Conexões	120
Zero da função afim	50	Vestibulares e Enem	123
Estudo do sinal da função afim	51	Respostas	125
Conexões	54	Lista de siglas das atividades extraídas de provas oficiais	129
Funções definidas por mais de uma sentença	57	A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	130
Explorando as funções definidas por mais de uma sentença	58	Referências bibliográficas comentadas	135
Gráficos de funções definidas por mais de uma sentença	61		
Tecnologias digitais	63		
Além da sala de aula	65		
Função modular	68		
Vestibulares e Enem	71		

CAPÍTULO 1

Função afim

Vista da estrutura de concreto da represa de Itaipu, em Foz do Iguaçu (PR), e do fluxo de água passando pelas comportas abertas. A usina hidrelétrica de Itaipu é produtora de energia limpa e renovável. Foto de 2017.

Dean Grand/Shutterstock

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.

Da água doce superficial do planeta, 12% está em território brasileiro. Essa característica permite ao país gerar, por meio de usinas hidrelétricas, energia limpa e renovável. Em uma usina hidrelétrica, a pressão da água armazenada em grandes barragens faz girarem turbinas que, com o auxílio de geradores, produzem energia elétrica. Em 2020, a maior usina geradora de energia limpa e renovável do planeta era a Itaipu Binacional. Ela recebeu esse nome porque foi concebida a partir de um acordo entre Brasil e Paraguai, em 1974, e atualmente fornece 11,3% da energia consumida no Brasil e 88,1% da consumida no Paraguai. A Itaipu Binacional está localizada na fronteira entre o Brasil e o Paraguai; parte dela no município de Foz do Iguaçu (PR), no Brasil, e parte no distrito de Ciudad del Leste, no Paraguai.

Os números da Itaipu Binacional impressionam:

- o total de concreto utilizado na construção da usina seria suficiente para construir 210 estádios de futebol como o Maracanã, no Rio de Janeiro (RJ);
- a medida de comprimento da altura da barragem principal (196 metros) é aproximadamente igual à medida de comprimento de altura de um prédio de 65 andares;
- o Brasil teria de queimar 536 mil barris de petróleo por dia para obter em termelétricas a mesma produção de energia gerada por Itaipu.

No ano de 2019, a Itaipu Binacional produziu, aproximadamente, 80 000 GWh. Considerando essa produção energética anual, vamos estimar a produção energética acumulada de Itaipu nos 10 anos seguintes a 2019.

Para isso, copie e complete a tabela no caderno, considerando 2019 o ano zero, depois converse com os colegas sobre cada item.

A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.

Fonte de consulta: ITAIPU BINACIONAL. Disponível em: <https://www.itaipu.gov.br/>. Acesso em: 7 abr. 2020.

Estimativa de produção energética acumulada de Itaipu

Ano após 2019	Produção acumulada em GWh a partir de 2019	Proporção entre a produção acumulada e a produção inicial (em 2019)
0 (2019)	80 000	1
1 (2020)	160 000	2
2	240 000	3
3	320 000	4
4		5
	480 000	
		7
		9
9		
10		

Tabela elaborada para fins didáticos.

Fique atento

O watt-hora (Wh) é uma unidade de medida de energia. Como referência, podemos afirmar que uma TV de 21 polegadas ligada consome aproximadamente 1 Wh em 40 s.

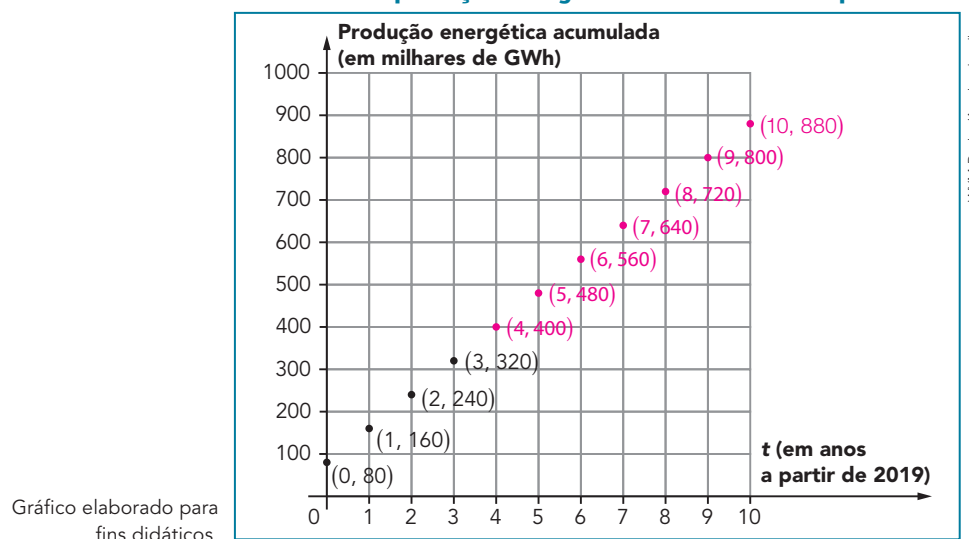
Geralmente, medidas de energia são expressas em múltiplos do watt-hora.

- 1 quilowatt-hora (kWh) equivale a 1 000 Wh (ou 10^3 Wh).
- 1 megawatt-hora (MWh) equivale a 1 000 000 Wh (ou 10^6 Wh).
- 1 gigawatt-hora (GWh) equivale a 1 000 000 000 Wh (ou 10^9 Wh).
- 1 terawatt-hora (TWh) equivale a 1 000 000 000 000 Wh (ou 10^{12} Wh).

Não escreva
no livro.

- a) Qual foi a regra utilizada na tabela para estimar a produção energética acumulada de Itaipu a partir de 2019? *Exemplo de resposta: O padrão utilizado foi de, a cada ano, aumentar a produção acumulada em 80 000 GWh.*
- b) Segundo essas estimativas, qual será a produção acumulada em 2025? E em 2027? *560 000 GWh; 720 000 GWh.*
- c) Em que ano a estimativa de produção acumulada será de 640 000 GWh? *No ano de 2026.*
- d) Em que ano a estimativa de produção acumulada ultrapassará pela primeira vez 1 000 000 de GWh? *No ano de 2031.*
- e) Observe a tabela anterior e reproduza a representação gráfica abaixo no caderno. Em seguida, complete os pontos no plano cartesiano de maneira que o eixo horizontal represente os anos analisados, sendo $t = 0$ o ano de 2019, $t = 1$ o ano de 2020 e assim sucessivamente até $t = 10$, e o eixo vertical represente a produção energética acumulada (em milhares de GWh).

Estimativa de produção energética acumulada de Itaipu



- f) O que você observa em relação à distribuição dos pontos no gráfico? *Exemplo de resposta: Os pontos estão alinhados ou pertencem a uma mesma reta.*
- g) Qual seria a produção acumulada que você estimaria para 6 meses (meio ano) após a produção de 2019? *120 000 GWh*
- h) Que relação você observa entre a produção energética acumulada E , a partir do ano de 2019, em função da quantidade t de anos após 2019?
- i) Segundo o Anuário Estatístico de Energia Elétrica 2019 (ano-base 2018), da Empresa de Pesquisa Energética (EPE), em 2018 foram produzidos no Brasil aproximadamente 600 TWh de energia elétrica. Para termos ideia da dimensão desse valor, responda: Considerando a estimativa de produção energética acumulada em Itaipu, feita assumindo uma produção anual constante igual à produção em 2018, em quantos anos a partir de 2019 a produção energética acumulada de Itaipu ultrapassaria 600 TWh? *Em 7 anos após 2019.*

Professor, os estudantes podem apresentar a relação entre a produção energética acumulada E , a partir do ano de 2019, em função da quantidade t de anos após 2019 de diferentes maneiras, não sendo obrigatório o uso da representação algébrica. Neste momento, verifique o entendimento sobre essa relação, explicitando-a oralmente ou pela língua materna; depois, no decorrer deste capítulo, serão feitas as formalizações e as representações com linguagem matemática.

h) Exemplo de resposta:
 $E = 80 000 + 80 000t$

CONHEÇA O CAPÍTULO

Objetivos

- Recordar o conceito de função e compreender o conceito de função afim.
- Analisar diferentes situações reais que podem ser modeladas por funções, em especial funções afins.
- Entender a ideia de função e de função afim e algumas das propriedades delas.
- Resolver e elaborar problemas utilizando o conceito de função afim e algumas propriedades.
- Conhecer o início histórico do estudo de funções afins.
- Construir, interpretar e analisar o gráfico de funções afins, utilizando ou não tecnologias digitais.
- Converter representações algébricas de funções afins em representações geométricas, e vice-versa.
- Analisar conjuntos de dados e reconhecer quando esses dados podem ser modelados por uma função afim.
- Construir modelos utilizando funções afins para resolver problemas.
- Analisar contextos que podem ser modelados por funções definidas por mais de uma sentença.
- Converter representações algébricas de funções definidas por mais de uma sentença em representações geométricas, e vice-versa.
- Construir gráficos de funções definidas por mais de uma sentença utilizando tecnologias digitais.

Justificativa

Há situações da Matemática financeira, das Ciências da Natureza, das Ciências Humanas e de outras áreas nas quais é possível construir modelos de comportamento de variáveis quantitativas utilizando funções, como a relação entre juros e capital inicial ou a relação entre população bacteriana e intervalo de tempo.

Por isso, para compreender esses modelos, é importante conhecer o que são funções e como elas são definidas, reconhecer quais funções são utilizadas e analisar o comportamento e a influência dos parâmetros delas no comportamento dos modelos.

Entre os tipos de funções, dois são comuns em modelos: as funções afins e as funções definidas por mais de uma sentença; e esses dois tipos são os temas deste capítulo. As funções afins são utilizadas em situações em que as taxas de variação das grandezas são constantes, e as funções definidas por várias sentenças permitem criar modelos para grandezas que apresentam comportamentos distintos, dependendo dos valores delas.

A BNCC

No decorrer do capítulo, favorecemos o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica, bem como das competências específicas e das habilidades de Matemática e suas Tecnologias e de outras áreas do conhecimento indicadas a seguir. Também estão indicados os temas contemporâneos transversais presentes no capítulo.

Competências gerais: CG01, CG07.

Competências específicas de Matemática e suas

Tecnologias: CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05.

Competências específicas de Ciências da Natureza e

suas Tecnologias: CECNT01, CECNT02.

Habilidades de Matemática e suas Tecnologias:

EM13MAT101, EM13MAT103, EM13MAT104, EM13MAT302, EM13MAT314, EM13MAT315, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT506, EM13MAT510.

Habilidades de outras áreas do conhecimento:

EM13LGG701, EM13CNT102, EM13CNT106, EM13CNT202, EM13CNT203, EM13CHS101, EM13CHS106.

Temas contemporâneos transversais:

- Ciência e Tecnologia;
- Diversidade Cultural;
- Educação Ambiental;
- Educação para Valorização do Multiculturalismo nas Matrizes Históricas e Culturais Brasileiras;
- Educação Fiscal.

A ideia de função

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste tópico encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação 1

Não escreva no livro.

Fábricas e máquinas

Atualmente, várias fábricas têm máquinas que possibilitam a criação de diferentes produtos a custos acessíveis a uma parcela maior da população. Essas máquinas, que também podem ser robôs, são programadas para realizar tarefas específicas. Considere que em uma fábrica existe uma máquina que realiza alguns procedimentos e transforma parte da fruta em purê e parte em suco.

- Ao colocar uma laranja na máquina, qual será o produto final? *Purê e suco de laranja.*
- Ao colocar uma maçã na máquina, qual será o produto final? *Purê e suco de maçã.*
- Converse com um colega sobre quais seriam os processos necessários para a máquina fazer essa transformação. *Exemplo de resposta: Retirar cascas e caroços, processar a fruta e separar o purê do suco.*

As imagens não estão representadas em proporção

Sergio Ranalli/Pulsar Imagens



Fábricas são locais onde objetos são produzidos utilizando ou não máquinas e robôs para isso.

Situação 2

Bork/Shutterstock



Os medicamentos líquidos, geralmente administrados em gotas, são uma opção para pessoas que têm dificuldade de engolir cápsulas ou comprimidos.

Considere que a bula de um remédio antitérmico recomende que a dosagem seja de 2 gotas para cada quilograma de massa da criança.

- Qual deve ser a quantidade de gotas desse medicamento que uma criança de 5 kg deve tomar? E uma criança de 10 kg? *10 gotas. 20 gotas.*
- Qual operação matemática você utilizou para calcular a resposta do item anterior? *Operação de multiplicação.*
- Escreva no caderno uma relação que indique como uma pessoa pode calcular a dosagem desse remédio, em gotas, a partir da medida de massa da criança, em quilogramas.

Multiplicar a medida de massa por 2.

Fique atento

Nunca tome medicamentos por conta própria, pois o uso de medicamentos sem prescrição médica pode causar riscos à saúde.

Situação 3

Combustível em automóveis

Um automóvel pode percorrer determinada distância de acordo com a quantidade de combustível que há no tanque dele. A autonomia (medida de distância máxima percorrida utilizando um tanque cheio de combustível) é dada, entre outros fatores, em **função** da quantidade de litros de combustível existente no tanque.

Suponha que determinado veículo percorra 12 km com 1 litro de combustível e nenhum outro fator interfira na autonomia.

- Sabendo que no tanque há 45 litros de combustível, qual será, aproximadamente, a medida de distância máxima que ele poderá percorrer sem precisar reabastecer? **540 km**
- Qual foi a operação matemática que você utilizou para responder ao item anterior? **Operação de multiplicação.**
- Considerando que esse veículo tem x litros de combustível no tanque, qual expressão indica a medida de distância máxima, em quilômetros, que pode ser percorrida sem necessidade de reabastecimento? **$x \cdot 12$**

As imagens não estão representadas em proporção

Goran Jakus/Shutterstock



Ao planejarem viagens, motoristas costumam considerar a quantidade de quilômetros rodados por litro como referência para estimar a quantidade de combustível necessária para percorrer o trajeto.

Situação 4

Cobrança de estacionamento

Alguns estacionamentos rotativos costumam cobrar um valor mínimo que dá ao motorista o direito de manter o carro estacionado no local durante certa medida de intervalo de tempo. Quando essa medida de intervalo de tempo acaba, há um acréscimo no valor do estacionamento, que aumenta com relação à quantidade de horas inteiras excedidas.

Considere que um motorista estaciona o carro em um local que cobra R\$ 14,00 por até 3 horas de estacionamento e R\$ 1,50 por hora excedente.

- Quanto o motorista terá de pagar se deixar o carro estacionado por 5 horas? **R\$ 17,00**
- No caso de pagar R\$ 21,50, quantas horas o motorista estacionou além das 3 horas iniciais? **5 horas.**
- E se ele permanecer por apenas 2 horas, quanto deverá pagar de estacionamento? **R\$ 14,00**
- Converse com os colegas sobre o porquê de o valor do estacionamento ser constituído por uma parte fixa e outra variável. **Resposta pessoal.**
- Escreva no caderno uma maneira de calcular o preço a pagar, de acordo um número x de horas em que o carro fica no estacionamento.

Exemplo de resposta: Se x estiver entre 0 e 3, o preço a pagar é R\$ 14,00. Se x for igual ou maior do que 3, o preço a pagar é dado por $14 + 1,5 \cdot (x - 3)$, em reais.



Andrey_Popov/Shutterstock

Ao buscar estacionamentos em uma região, um motorista pode utilizar conhecimentos matemáticos para calcular qual é, financeiramente, a melhor opção, já que os valores fixo e por hora excedente podem variar na mesma região.

Explorando a ideia de função

A ideia de função está presente quando relacionamos os valores de duas grandezas variáveis. Acompanhe alguns exemplos.

a) Número de litros de gasolina e preço a pagar

A tabela a seguir relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles.

Relação entre o número de litros de gasolina e o preço a pagar

Número de litros	Preço a pagar (em R\$)
1	4,50
2	9,00
3	13,50
4	18,00
⋮	⋮
40	180,00
x	$4,50x$

Tabela elaborada para fins didáticos.

O número de litros de gasolina x corresponde a um preço a pagar p . Dizemos que o preço p , em reais, é dado em função do número de litros de gasolina x . A **fórmula** que relaciona p com x é, nesse caso, $p = 4,5x$. Também podemos chamar essa fórmula de **lei da função** ou **lei de correspondência**.

b) Lado do quadrado e perímetro

A tabela a seguir relaciona a medida de comprimento do lado de um quadrado (ℓ), em centímetros, e a medida de perímetro (P), também em centímetros.

Relação entre a medida de comprimento do lado de um quadrado e a medida de perímetro

Medida de comprimento do lado (ℓ em cm)	Medida de perímetro (P em cm)
1	4
2	8
2,5	10
3	12
4,1	16,4
⋮	⋮
ℓ	4ℓ

Tabela elaborada para fins didáticos.

Reflita

- Qual seria o preço de 10 litros de gasolina? **R\$ 45,00**
- Quantos litros de gasolina poderiam ser comprados com R\$ 58,50? **13 litros.**

Fique atento

Podemos usar a notação $f(x)$ no lugar de p . Assim, nesse caso, teríamos $f(x) = 4,50x$.

Fique atento

Perímetro é o contorno de uma figura geométrica plana.

Professor, nesses exemplos, a função está sendo representada por uma tabela ou por uma lei de função.

Observe que a medida de perímetro do quadrado depende da medida de comprimento do lado dele. Dizemos que a medida de perímetro é dada em função da medida de comprimento do lado. A cada valor dado para a medida de comprimento do lado corresponde **um único** valor para a medida de perímetro. E temos que a medida de perímetro (P) corresponde a 4 vezes a medida de comprimento do lado (ℓ). Podemos representar assim:

$$P = 4\ell \text{ (lei da função).}$$

Fique atento

Podemos usar $f(\ell)$ no lugar de P . Assim, $f(\ell) = 4\ell$.

Como a medida de perímetro depende da medida de comprimento do lado, a medida de perímetro é a **variável dependente** dessa função, e a medida de comprimento do lado é a **variável independente**.

Refleta

- Qual é a medida de perímetro de um quadrado cuja medida de comprimento do lado é 3,5 cm? **14 cm**
- Qual é a medida de comprimento do lado de um quadrado cuja medida de perímetro é 22 cm? **5,5 cm**

c) A “máquina” de dobrar

Observe a seguir a representação de uma “máquina” que recebe um número como entrada e devolve como saída o dobro desse número.



Paulo Manz/Arquivo da editora

O algoritmo a seguir, apresentado usando pseudocódigo, foi construído para obter os números que saem da “máquina” a partir dos números que entram.

Início

Nomeie de x o valor de entrada

Crie n

Calcule $n \leftarrow 2 \cdot x$

Saída: n

Fim

Fique atento

Pseudocódigo é uma linguagem simples e escrita sem utilizar uma linguagem de programação específica.

Fique atento

- Algoritmos são sequências de passos ou regras simples e ordenadas, elaboradas para obter soluções gerais de determinados problemas, sendo escritas de maneira clara e objetiva.
- Nesse algoritmo, x e n são as variáveis e a seta $\leftarrow$ indica que uma variável do algoritmo vai receber um valor (um número explicitado no algoritmo, o valor de outra variável ou o resultado de um cálculo). Por exemplo, em $n \leftarrow 2 \cdot x$, a variável n do algoritmo recebe o valor do cálculo $2 \cdot x$.

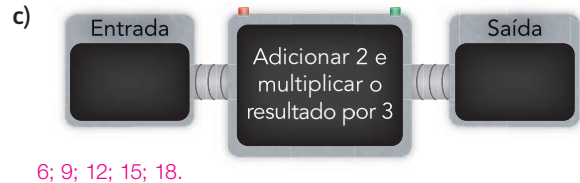
Observando o algoritmo que representa o funcionamento da “máquina” de dobrar, temos $n = 2 \cdot x$, que é a fórmula matemática da função.

Fique atento

Podemos usar $f(x)$ no lugar de n . Assim, $f(x) = 2x$.

Professor, uma explicação sobre o que são algoritmos encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

- Invente uma "máquina" de triplicar e adicionar 1, semelhante à do exemplo dado na página anterior, e escreva no caderno a lei dessa função e um algoritmo que ela poderia utilizar. $f(x) = 3x + 1$
Um exemplo de algoritmo encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
- Represente no caderno cada uma das quatro máquinas abaixo. Em seguida, coloque cada um dos números do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ na entrada de cada máquina e, respeitando as operações indicadas, escreva os resultados que serão apresentados na saída.



Ilustrações: Banco de Imagens/Arquivo da editora

- Observe na tabela a seguir a medida de comprimento do lado (em cm) de uma região quadrada e a medida de área A (em cm^2).

Relação entre a medida de comprimento do lado e a medida de área de uma região quadrada

Medida de comprimento do lado (ℓ em cm)	1	3	4	5,5	10	...	x
Medida de área (A em cm^2)	1	9	16	30,25	100	...	x^2

Tabela elaborada para fins didáticos.

- Quais são as variáveis dessa situação? *A medida de área A e a medida de comprimento do lado ℓ da região quadrada.*
 - Qual é a variável dependente? *A medida de área A .*
 - Qual é a variável independente? *A medida de comprimento do lado ℓ .*
 - Qual é a lei da função que associa a medida de comprimento do lado com a medida de área da região quadrada?
 $A = \ell^2$
 - Quanto mede a área da região quadrada cujo lado tem medida de comprimento de 12 cm?
 144 cm^2
 - Qual é a medida de comprimento do lado da região quadrada cuja área mede 169 cm^2 ?
 13 cm
- Expresse no caderno a lei da função f que associa cada número real x :
 - à terça parte dele; $f(x) = \frac{x}{3}$
 - ao dobro dele diminuído de 3; $f(x) = 2x - 3$
 - à metade dele somada com 3; $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
 - ao cubo dele somado com o quadrado dele.
 $f(x) = x^3 + x^2$
 - Um motorista, saindo de um terminal **A**, viaja por uma estrada e observa que a medida de distância percorrida, a partir do ponto inicial, pode ser calculada por $d(x) = 50x + 6$, sendo d a medida de distância, em quilômetros, e x a medida de intervalo de tempo, em horas. Junte-se a um colega e façam no caderno uma tabela listando as medidas de distância percorridas após cada intervalo de 1 hora desde $x = 1$ até $x = 5$.
A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.
 - Um fabricante vende um produto por R\$ 0,80 a unidade. O custo total desse produto é composto de uma taxa fixa de R\$ 40,00 mais o custo de produção de R\$ 0,30 por unidade.
 - Qual é o número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo (*receita* menos despesa)? *80 unidades.*
 - Se vender 200 unidades desse produto, o fabricante terá lucro ou prejuízo? *Lucro.*
 - Elabore mais uma pergunta utilizando a situação do enunciado. *Resposta pessoal.*

Receita

Quantia recebida ou obtida com a venda de um ou mais produtos. Se a receita é maior do que o custo, há lucro. Se é menor, há prejuízo.

Formalizando a ideia de função

A ideia de função por meio de conjuntos

É possível representar uma função utilizando a notação de conjuntos. Para isso, observe os exemplos a seguir.

a) Considere os conjuntos A e B tais que:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

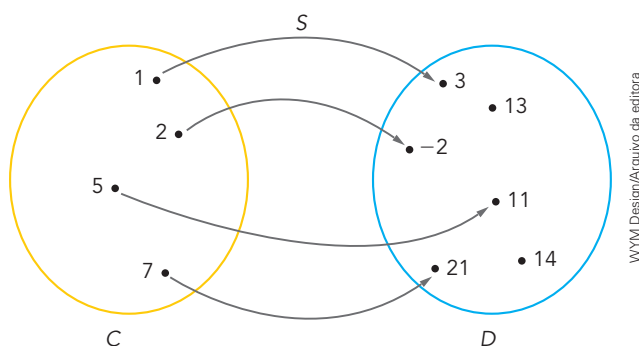
e

$$B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 25, 30\}.$$

A tabela ao lado mostra uma relação R entre esses dois conjuntos: Cada número pertencente a A está associado ao quádruplo do próprio número, que pertence a B .

A	B
0	0
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

b) Observe a seguir o diagrama de uma relação S entre os conjuntos C e D .



Perceba que, nessa representação, cada valor pertencente a C está associado a um único valor de D .

Nesses dois exemplos anteriores, as relações estabelecidas entre A e B e entre C e D são tais que:

- todo elemento do primeiro conjunto tem um correspondente no segundo conjunto;
- cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento no segundo conjunto.

Como as relações apresentadas nos dois exemplos satisfazem essas duas condições, podemos dizer que, no primeiro exemplo, temos uma **função de A em B** e, no segundo exemplo, temos uma **função de C em D** .

Definição e notação

Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma **função f de A em B** é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Nessas condições, usamos as seguintes notações:

$$f: A \rightarrow B$$

ou

$$A \xrightarrow{f} B$$

Nos dois casos, lemos: f é uma função de A em B .

Além disso, se a função f relaciona o elemento x de A com o elemento y de B , então podemos escrever $f: x \mapsto y$ ou, mais comumente:

$$f(x) = y$$

(Lemos: f de x é igual a y .)

No primeiro exemplo, podemos usar as duas notações para descrever a função apresentada:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto 4x$$

Refleta

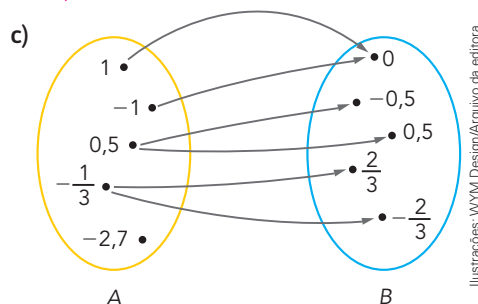
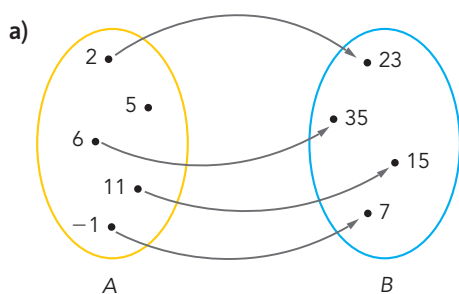
Por que foi utilizado o termo “ $4x$ ” na expressão anterior?

Porque, na função do exemplo **a**, cada elemento de A está associado ao quádruplo dele em B .

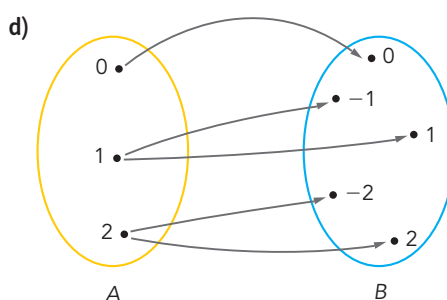
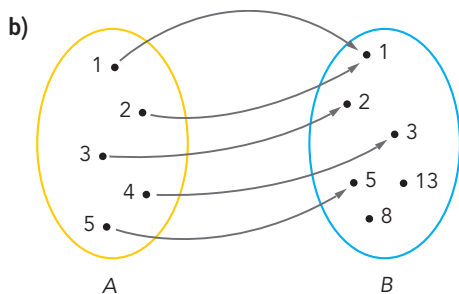
Atividades

Não escreva no livro.

7. Para cada item a seguir, avalie se o diagrama apresentado representa uma função de A em B . Caso não represente uma função, justifique. *As respostas encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.*



Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora



8. Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e a relação f de A em B dada por $f(x) = 2x - 1$.

a) Utilizando um diagrama, represente a relação f de A em B .

As respostas encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.

b) A relação f é uma função de A em B ? Justifique.

9. No caderno, faça o que é pedido em cada item.

a) Escreva dois conjuntos numéricos não vazios quaisquer G e H de modo que exista uma função de G em H .

b) Crie uma tabela e um diagrama que representem essa função de G em H . *Um exemplo de resposta encontra-se nas*

a) Exemplo de resposta: $G = \{0, 13, 102\}$ e $H = \{-1, 53, 100, 200\}$.

Orientações específicas deste Manual.

Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Ao definirmos uma função f de A em B , os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de **domínio** ($D(f)$) e **contradomínio** ($CD(f)$) da função f .

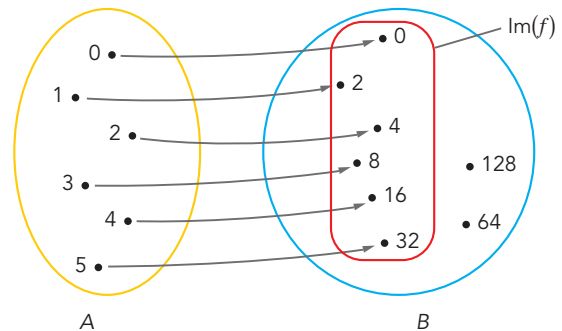
Além disso, para cada $a \in A$, o elemento $b \in B$ tal que $f(a) = b$ é chamado de **imagem** de a pela função f . Já o conjunto formado pelas imagens de todos os elementos de A é chamado de **conjunto imagem** de f e é indicado por $Im(f)$.

Fique atento

Em toda função f de A em B , temos que $Im(f)$ está contido em B , ou seja, é um subconjunto de B . Indicamos: $Im(f) \subset B$.

Observe os exemplos a seguir.

- a) Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$ e a função f de A em B , representada pelo diagrama ao lado. Observe que o domínio de f é o conjunto A e o contradomínio de f é o conjunto B . O conjunto imagem de f é formado pelas imagens dos elementos de A , portanto $\text{Im}(f) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \{0, 2, 4, 8, 16, 32\}$.



Refleta

- Como pode ser expressa a lei da função $f: A \rightarrow B$? $f(x) = 2^x$
- Por que 64 e 128 não pertencem a $\text{Im}(f)$? Porque não são imagem de nenhum elemento do domínio de f .

- b) Considere uma função f de domínio $\mathbb{N}^*$ e contradomínio $\mathbb{Z}$ que relaciona cada elemento do domínio ao próprio oposto. Observe que:

- como todo elemento de $\mathbb{N}^*$ é um número natural não nulo, o oposto de cada elemento será um número inteiro negativo;
- todo inteiro negativo é o oposto de um número natural não nulo.

Por isso, toda imagem de um elemento do domínio de f ($\mathbb{N}^*$) pertence ao conjunto dos números inteiros negativos ($\mathbb{Z}^-$) e todo elemento de $\mathbb{Z}^-$ é imagem de um elemento de $\mathbb{N}^*$. Portanto, $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}^-$.

Refleta

Como pode ser expressa a lei da função $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$?

$$f(x) = -x$$

Fique atento

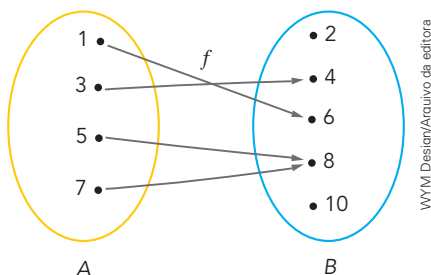
Lembre-se de alguns conjuntos numéricos.

- $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- $\mathbb{N}^*$ representa o conjunto dos números naturais não nulos: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Nele estão os números naturais e os respectivos opostos.
- $\mathbb{Z}^-$ representa o conjunto dos números inteiros negativos: $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$.

Atividades

Não escreva no livro.

10. De acordo com o diagrama a seguir, que representa a função f , responda aos itens no caderno.



- a) Qual é o domínio e o contradomínio de f ? $D(f) = \{1, 3, 5, 7\}$; $CD(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- b) Qual é o conjunto imagem de f ? $\text{Im}(f) = \{4, 6, 8\}$
- c) Quanto vale $f(3)$? $f(3) = 4$
- d) Existem elementos de $CD(f)$ que não são elementos de $\text{Im}(f)$? Se sim, quais são eles? Sim; 2 e 10.

- e) Existe algum elemento de $D(f)$ que está relacionado pela função f a mais de um elemento de $CD(f)$? Se sim, qual é esse elemento? Não.

- f) Existe algum elemento de $\text{Im}(f)$ que é imagem de mais de um elemento de $D(f)$? Se sim, qual é esse elemento? Sim; 8 ($f(5) = f(7) = 8$).

11. Considere a função $g: A \rightarrow B$, em que $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 4, 12, 20, 24\}$ e $g(x)$ é o quádruplo de x para todo $x \in A$.

- a) Construa no caderno o diagrama que representa essa função. A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.
- b) Determine $D(g)$, $CD(g)$, $\text{Im}(g)$. $D(g) = \{1, 3, 5\}$; $CD(g) = \{1, 4, 12, 20, 24\}$; $\text{Im}(g) = \{4, 12, 20\}$
- c) Determine $g(3)$. $g(3) = 12$
- d) Determine x para $g(x) = 20$. $x = 5$
- e) Para $g(x) = 4$, determine o valor de x . $x = 1$

A função afim

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste tópico encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Victoria Denisova/Shutterstock

Situação 1

Não escreva no livro.

Vazão de uma piscina

Para realizar a troca de água de uma piscina, é necessário esvaziá-la parcialmente ou totalmente, para então enchê-la com a quantidade de água retirada. O intervalo de tempo gasto nesse processo de esvaziamento pode ser longo e depende da vazão com que a água da piscina sai pelos ralos.

Para a manutenção da piscina de uma residência, os ralos foram destampados, iniciando o esvaziamento dela. Após essa abertura dos ralos, foi notado que, em 30 minutos, foram retirados 600 litros de água e que, em 1 hora, já haviam sido esvaziados 1 200 litros.

Sabe-se que a vazão é constante – isto é, que o processo ocorre a uma **taxa de variação constante** entre a medida de volume de água esvaziada e a medida de intervalo de tempo decorrida – e que a piscina inicialmente tinha 6 000 litros.

- Qual é a medida de intervalo de tempo necessária, desde o início do esvaziamento da piscina, para que a medida de volume de água seja reduzida à metade? **2 h 30 min**
- Em quanto tempo a piscina terá 2 000 litros? **3 h 20 min**
- E em quanto tempo ela estará completamente vazia? **5 h**
- Para a situação apresentada, escreva no caderno a lei da função que relaciona a medida de intervalo de tempo decorrido, em horas, desde o início do esvaziamento, à medida de volume de água **esvaziada**. Exemplo de resposta: Sendo v a medida de volume esvaziada e t a medida de intervalo de tempo, $v(t) = 1200t$.
- Escreva a lei da função que relaciona a medida de intervalo de tempo decorrido, em horas, à medida de volume de água **restante**. Exemplo de resposta: Sendo u a medida de volume restante e t a medida de intervalo de tempo, $u(t) = 6000 - 1200t$.

Professor, nos itens **d** e **e**, os estudantes podem apresentar as leis das funções de diferentes maneiras, não sendo obrigatório o uso da representação algébrica. Neste momento, é importante explorar o entendimento deles de como ocorre a relação, explicitando-a oralmente ou pela língua materna; depois, no decorrer deste capítulo, serão feitas as formalizações e as representações com linguagem matemática.

As imagens não estão representadas em proporção

Fernando Favoretto/Criar Imagem



Em balanças de restaurantes *self-service*, o conjunto de visores costuma exibir a medida de massa, o preço por quilograma e o valor total da refeição.



Uma das maneiras de realizar a manutenção de uma piscina é realizar a troca de água. Entretanto, deve-se verificar a possibilidade de métodos alternativos, devido à alta quantidade de água gasta nessa troca.

Professor, se julgar necessário, apresente aos estudantes que **vazão** é a razão entre a medida de volume de um fluido que escoa, pela medida de intervalo de tempo.

Situação 2

Restaurante do tipo *self-service*

Quando você vai a um restaurante *self-service*, o valor que você paga é dado em **função** da quantidade de gramas de comida que você coloca no prato.

- Se, em determinado restaurante *self-service*, o valor cobrado é de R\$ 50,00 por quilograma de comida, quanto será pago por 600 g de comida? **R\$ 30,00**
- Se o valor pago por uma pessoa for de R\$ 21,50, quanto mede a massa, em quilogramas, que essa pessoa colocou no prato? **0,43 kg**
- Escreva no caderno a lei da função que relaciona a medida de massa de comida, em gramas, com a quantia paga pela refeição, em reais. Exemplo de resposta: Sendo p a quantia paga, em reais, e m a medida de massa de comida, em gramas, $p(m) = 0,05m$.

Situação 3

Velocidade e distância

Você já deve ter observado que, ao acionar os freios de um carro, ele ainda percorre alguns metros durante certa medida de intervalo de tempo: a velocidade vai diminuindo até ele parar. Então, vamos supor que um carro esteja a 50 km/h quando os freios são acionados e, em 1 segundo, ele chegue a 25 km/h e, no segundo seguinte, já tenha parado. Podemos estimar a diminuição da medida de velocidade do carro em frenagem em **função** da medida de intervalo de tempo decorrido, desde o momento em que o motorista pisou no freio, utilizando uma **taxa de variação constante**.

Considere um motorista que está a 80 km/h em uma via cuja medida de velocidade máxima é de 90 km/h. Em alguns quilômetros, ele vai passar por um trecho da via cuja medida de velocidade máxima é de 50 km/h e, por isso, começou a frear o veículo.

- Se em 20 segundos o velocímetro passou a indicar 60 km/h, quantos segundos devem se passar, no mínimo, desde o início da frenagem, para que o carro esteja na medida de velocidade adequada para passar pelo trecho da via mantendo a intensidade de frenagem? **30 s**
- Se ele continuar freando, com a mesma intensidade, qual é a medida de intervalo de tempo entre o acionamento dos freios e o instante em que o carro pararia? **80 s**
- Considerando a situação apresentada, escreva no caderno a lei da função que relaciona a medida de intervalo de tempo de frenagem, em s, à medida de velocidade do móvel, em km/h. **Sendo v a medida de velocidade do móvel e t a medida de intervalo de tempo de frenagem, $v(t) = 80 - t$.**
- Em situações de frenagem de carros, pesquise algumas práticas que garantem a segurança no trânsito dos passageiros e dos pedestres.

Exemplos de resposta: Uso de cinto de segurança, para evitar que frenagens bruscas causem danos físicos aos passageiros; evitar frear bruscamente para não causar colisões e atropelamentos.

Bjoern Wylezich/Shutterstock



Velocímetros permitem que motoristas tenham controle da medida de velocidade dos automóveis em tempo real, já que diferentes vias podem ter diferentes limites de velocidade.

As imagens não estão representadas em proporção

Um pouco da história das funções afins

Uma das maneiras mais elementares de relacionar duas grandezas y e x é por meio de uma relação do tipo $y = ax + b$, na qual a e b são números reais. Esse tipo de relação é conhecido como **função afim**. As situações apresentadas nesta página e na anterior são exemplos de situações que podem ser representadas por funções afins.

No início do estudo das funções, a preocupação dos matemáticos, incluindo o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727), era desvendar funções diferentes da função afim. A função afim foi estudada e vista com mais atenção somente no século XX, durante as décadas de 1960 e de 1970, por um grupo de matemáticos que teve origem, em 1934, com dois professores da Universidade de Estrasburgo, na França.

Na foto, tirada em um congresso em setembro de 1938, estão alguns dos brilhantes matemáticos que constituíram a fase inicial do grupo Bourbaki. Da esquerda para a direita: Simone Weil (acompanhando o irmão, André), Charles Pisot, André Weil (escondido), Jean Dieudonné (sentado), Claude Chabauty, Charles Ehresmann e Jean Delsarte.



Reprodução/Coleção particular

Esse grupo de matemáticos, na maioria franceses, decidiu que o trabalho seria coletivo, sem menção a autores individuais. Para assinar os trabalhos, livros e teses por eles publicados, foi criado um pseudônimo, Nicolas Bourbaki.

O objetivo desse grupo era tratar a Matemática de maneira mais rigorosa. Esse tratamento estava alicerçado na **teoria dos Conjuntos**. Foi então que funções ficaram associadas a conceitos de conjuntos conhecidos como domínio, contradomínio e conjunto imagem. A função afim ganhava a forma e o tratamento como a conhecemos atualmente.

A última publicação do grupo foi em 1983.

Fonte de consulta: ROBALO, Marco. Nicolas Bourbaki (1935-?). *e-escola*, 23 set. 2009. Disponível em: <http://e-escola.tecnico.ulisboa.pt/personalidade/bourbaki-nicolas>. Acesso em: 8 abr. 2020.

As funções afins têm grande aplicação no cotidiano, conforme veremos neste capítulo.

Explorando a função afim

Nos últimos anos, em diversas cidades do Brasil e do mundo, cresceu o número de aplicativos de transporte privado individual que conectam motoristas particulares a passageiros.

Em alguns casos, esses aplicativos estabelecem o preço da corrida de acordo com um **valor fixo inicial** mais um **valor variável**, que depende linearmente da medida de distância percorrida e é determinado pelo **valor por quilômetro rodado**.

Quando um usuário requisita uma viagem em um aplicativo de transporte individual, o aplicativo fornece uma estimativa de preço para essa viagem em função da medida de distância que será percorrida e de outras variáveis.



Joa Souza/Shutterstock

Explore para descobrir

Para as atividades a seguir, considere que os valores cobrados nos aplicativos A e B dependem apenas do valor fixo inicial e do valor por quilômetro rodado. Faça as atividades com um colega.

1. Em um aplicativo A, uma viagem de 20 km custa R\$ 52,00. Com essa informação, é possível calcular o valor fixo inicial? E o valor por quilômetro rodado cobrado por esse aplicativo? Justifique suas repostas.
2. Em um aplicativo B, uma viagem de 10 km custa R\$ 23,00 e uma viagem de 12,5 km custa R\$ 26,75. Com essas informações, é possível calcular o valor fixo inicial cobrado por esse aplicativo? E o valor por quilômetro rodado? Justifique suas repostas.

As respostas encontram-se nas **Orientações específicas deste Manual**. Não escreva no livro.

3. A partir da resposta da atividade anterior, escreva no caderno a lei da função que relaciona a medida de distância percorrida, em quilômetros, ao valor da viagem, em reais, no aplicativo B.
4. Escreva no caderno as leis de pelo menos duas funções que poderiam ser a função que relaciona a medida de distância percorrida, em quilômetros, ao valor da viagem, em reais, no aplicativo A (isto é, que satisfaçam a condição de que uma viagem de 20 km custe R\$ 52,00).
5. Um aplicativo que pratique um valor inicial fixo menor do que outro é necessariamente mais vantajoso do ponto de vista financeiro? Justifiquem.

Professor, nas atividades 3 e 4 os estudantes também podem apresentar a lei de cada função de diferentes maneiras, não sendo obrigatório o uso da representação algébrica.

Formalizando a definição de função afim

As situações das páginas 20 e 21 apresentam pares de grandezas cujos valores podem ser relacionados por meio de uma função afim: intervalo de tempo com volume de água, na situação 1; massa de comida com quantia a pagar, na situação 2; e intervalo de tempo de frenagem com velocidade, na situação 3.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **função afim** quando existem dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos facilitar a escrita de $f: x \mapsto ax + b$ escrevendo que a função f é dada pela lei $f(x) = ax + b$. Mas sempre atentos para não confundir a função $f: x \mapsto ax + b$ com o número real $f(x)$, que é o valor assumido pela função no ponto x .

Sabendo que os números reais a e b são chamados de **coeficientes** da função, analise alguns exemplos a seguir.

a) $f(x) = 2x + 1$ ($a = 2$ e $b = 1$)

d) $f(x) = 4,3x$ ($a = 4,3$ e $b = 0$)

b) $f(x) = \pi x - 4$ ($a = \pi$ e $b = -4$)

e) $f(x) = 6$ ($a = 0$ e $b = 6$)

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$ ($a = -\frac{1}{3}$ e $b = 5$)

f) $f(x) = 0$ ($a = 0$ e $b = 0$)

Uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$, com a e b números reais e $a \neq 0$, é chamada **função polinomial de 1º grau**.

Uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$, com $b \neq 0$, é chamada **função constante não nula**.

A função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ é chamada **função constante nula** (ou **função nula**).

Refleta

- Dos exemplos acima, quais são funções polinomiais de 1º grau? **a, b, c e d.**
- Por que as funções definidas como $f(x) = b$ e $f(x) = 0$ são chamadas função constante e função constante nula, respectivamente?
- Dos exemplos anteriores, quais são funções constantes não nulas? E quais são funções nulas? **Função constante não nula: e. Função nula: f.**
- Porque, em ambos os casos, a imagem de qualquer ponto do domínio é constante, sendo igual a zero se for uma função constante nula, ou diferente de zero se for uma função constante não nula.

Acompanhe a situação: Determinado balão infla ou desinfla dependendo da medida de temperatura a que é submetida uma solução gasosa presente no interior dele. A 0°C , a medida de volume dessa solução é 20 cm^3 , mas aumenta linearmente 2 cm^3 cada vez que a medida de temperatura t ($0 < t < 10$) sofre um aumento de 1°C . Assim, a medida de volume do balão pode ser expressa, em centímetros cúbicos, por $V(t) = 2t + 20$.

Se a medida de temperatura sofrer um aumento de $2,5^\circ\text{C}$, a medida de volume será, em centímetros cúbicos, $V(2,5) = 2 \cdot (2,5) + 20 = 5 + 20 = 25$.

De modo geral, se a medida de volume a 0°C for igual a b e aumentar linearmente $a\text{ cm}^3$ para cada 1°C a mais na temperatura, a medida de volume, em centímetros cúbicos, desse balão poderá ser expressa pela função afim V dada por:

$$V(t) = at + b$$

Outra aplicação comum das funções afins é no estudo do movimento de corpos. Consideremos um ponto que se movimenta sobre um eixo: em cada instante t , a posição é dada pela função S , que é dada pela equação horária de posição. Um movimento é chamado **movimento uniforme** quando o ponto se desloca sempre no mesmo sentido e, além disso, em intervalos de tempo com mesma medida, percorre espaços de mesma medida.

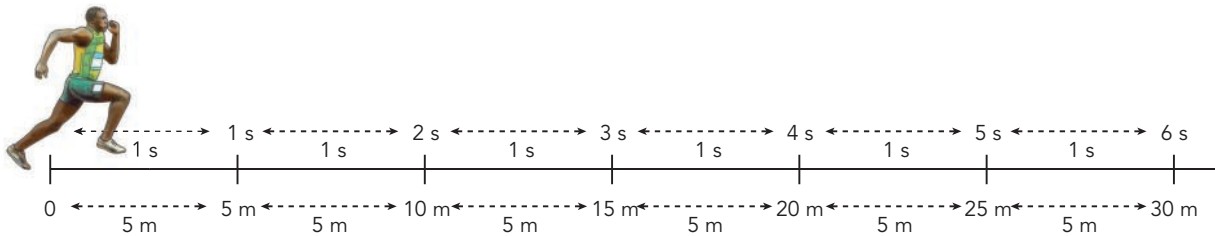
Nessa situação, S é uma função afim definida por $S(t) = vt + b$. Nessa expressão, o coeficiente v é chamado **velocidade** e o coeficiente b é a **posição inicial**, dada pela expressão $b = S(0)$.

Fique atento

Como a função afim pode ser usada para descrever a variação da posição em função do intervalo de tempo em um movimento uniforme, dizemos que esse tipo de função constitui o modelo matemático para o movimento uniforme.

A posição do ponto no eixo é dada por $S(t) = vt + b$, mas o espaço (S) que ele percorreu é dado por $S = vt$.

Por exemplo, observe a representação de um atleta correndo com medida de velocidade constante:



Ele desenvolve um movimento uniforme. Durante todo o trajeto percorre 5 metros a cada 1 segundo, ou seja, a medida de velocidade é de 5 m/s. Então, a função que descreve esse movimento é: $S(t) = 5t$, sendo $b = 0$.

Valor de uma função afim

O valor numérico de uma função afim f , dada por $f(x) = ax + b$, para $x = x_0$ é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$.

Por exemplo, na função afim dada por $f(x) = 5x + 1$, podemos determinar:

- a) $f(1) = 5 \cdot 1 + 1 = 5 + 1 = 6$. Logo, $f(1) = 6$.
- b) $f(-3) = 5 \cdot (-3) + 1 = -15 + 1 = -14$. Logo $f(-3) = -14$.
- c) $f\left(\frac{1}{5}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$. Logo $f\left(\frac{1}{5}\right) = 2$.
- d) $f(x + h) = 5 \cdot (x + h) + 1 = 5x + 5h + 1$. Logo, $f(x + h) = 5x + 5h + 1$.

Valor inicial

Em uma função afim f , dada por $f(x) = ax + b$, o número $b = f(0)$ é chamado **valor inicial da função f** .

Analise alguns exemplos de leis de funções e o valor inicial de cada uma delas.

- a) O valor inicial de $f(x) = -2x + 3$ é 3, pois $f(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$.
- b) O valor inicial de $f(x) = 5x + 1$ é 1, pois $f(0) = 5 \cdot 0 + 1 = 1$.
- c) O valor inicial de $f(x) = 7x$ é 0, pois $f(0) = 7 \cdot 0 = 0$.

Atividades

Não escreva no livro.

12. A lei da função que expressa o número do sapato (N) em função da medida de comprimento (c) do pé, em centímetros, é $N = \frac{5c + 28}{4}$ ou $N = \frac{5}{4}c + 7$. Calcule no caderno:

- a) o número do sapato quando a medida de comprimento do pé é 24 cm; 37
- b) a medida de comprimento do pé de quem calça 40. 26,4 cm

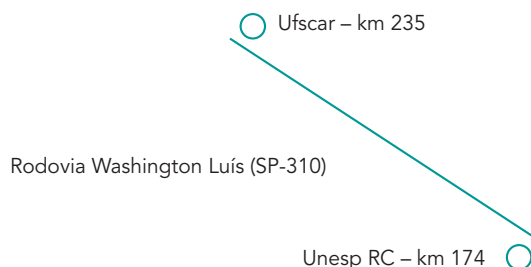
13. Nas férias de verão de 2016, Alfredo, de 40 anos, que tem 3 filhos – Pedro, de 10 anos, Aline, de 8 anos, e Paloma, de 6 anos –, prometeu aos filhos que fariam uma viagem juntos nas férias de verão do ano em que a soma das idades deles fosse igual à idade de Alfredo. Essa viagem deve ocorrer, então, nas férias de verão de:

Alternativa d.

- a) 2017. d) 2024.
b) 2018. e) 2025.
c) 2020.

14. Um professor de Matemática parte da Universidade Federal de São Carlos (Ufscar), localizada na cidade de São Carlos (SP) na rodovia Washington Luís, km 235, em direção à Universidade Estadual Paulista (Unesp), localizada na cidade de Rio Claro (SP) na mesma rodovia, no km 174. Nesse deslocamento, o automóvel do professor desenvolve uma velocidade média de medida igual a 90 km/h. No mesmo instante, saindo de Rio Claro, um professor de Física se dirige a São Carlos desenvolvendo uma velocidade média de medida igual a

93 km/h. A figura a seguir ilustra a rodovia que interliga as 2 cidades.



WWM Design/Arquivo da editora

Considere que as equações horárias dos automóveis sejam $S_1 = 174 + 93t$ e $S_2 = 235 - 90t$, em que S_1 é a posição do veículo que sai de Rio Claro e S_2 é a posição do veículo que sai de São Carlos, ambas em função do instante t (em horas).

- a) Qual é a posição em que se encontra cada um dos veículos após 10 min de viagem? **km 189,5 e km 220.**
b) Quais são os instantes em que a medida de distância que separa os 2 veículos é de 30 km? **$\frac{31}{183}$ h e $\frac{91}{183}$ h.**

Função afim e graduações do termômetro

Entre as escalas termométricas de um termômetro, as mais usadas são a escala Fahrenheit, principalmente nos países de língua inglesa (como Estados Unidos e Inglaterra), e a escala Celsius, na maior parte dos demais países. Em um termômetro, a medida de comprimento da altura da coluna de líquido (atualmente, costuma ser álcool colorido) aumenta ou diminui conforme a medida de temperatura aumenta ou diminui, respectivamente.

Modelo de termômetro de álcool colorido graduado nas escalas Celsius e Fahrenheit.



Tomas Ragna/Shutterstock

Para graduar um termômetro na escala Celsius, escolhem-se duas medidas de temperatura determinadas: a da fusão do gelo, à qual se atribui o valor zero, e a da ebulição da água (à pressão do nível do mar), à qual se atribui o valor 100. Dividindo-se o intervalo entre os dois pontos fixos (0 e 100) em 100 partes iguais, obtém-se o termômetro graduado na escala Celsius.

Na escala Fahrenheit, divide-se o intervalo entre esses mesmos pontos fixos (medida de temperatura de fusão do gelo e medida de temperatura de ebulição da água) em 180 partes iguais. Atribui-se ao nível inferior o valor 32 e ao superior o valor 212; então, o zero dessa escala está 32 graus Fahrenheit abaixo da medida de temperatura de fusão do gelo. Da construção dessas escalas, passamos a saber que $0^\circ\text{C} = 32^\circ\text{F}$ e $100^\circ\text{C} = 212^\circ\text{F}$.

Dada uma medida de temperatura qualquer, em graus Fahrenheit, como obtê-la em graus Celsius?

Há duas maneiras:

1ª maneira: Podemos estabelecer entre as duas escalas a seguinte proporção (em que C é a medida de temperatura na escala Celsius e F é a medida de temperatura na escala Fahrenheit):

$$\frac{C - 0}{100 - 0} = \frac{F - 32}{212 - 32} \Rightarrow \frac{C}{100} = \frac{F - 32}{180} \Rightarrow \frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5F - 160 = 9C \Rightarrow 5F = 9C + 160 \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow F = 1,8C + 32$$

2ª maneira: A mudança de escala de Celsius para Fahrenheit é uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de lei dada por $f(x) = ax + b$, que associa à medida x , em graus Celsius, à medida $f(x)$, em graus Fahrenheit, da mesma coluna de líquido.

Sabemos que $f(0) = 32$ e $f(100) = 212$.

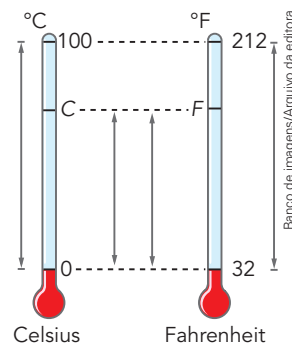
Como $f(0) = b$, então $b = 32$.

Temos também que $f(100) = 100a + 32$, ou seja, $100a + 32 = 212$ e, então, $a = 1,8$.

Logo, $f(x) = 1,8x + 32$.

Observamos, então, que as duas maneiras mostram como relacionar a medida em Celsius de uma temperatura e a medida em Fahrenheit, e que a transformação de uma medida de temperatura da escala Celsius (C , ou x) para a escala Fahrenheit (F , ou $f(x)$) é um exemplo de função polinomial de 1ª grau:

$$F = 1,8C + 32 \text{ ou } f(x) = 1,8x + 32$$



Atividades resolvidas

1. Em qual temperatura as medidas na escala Celsius e na escala Fahrenheit são iguais?

Resolução

Essa pergunta é equivalente a esta outra: "Para qual valor de x temos $f(x) = x$?"

$$f(x) = 1,8x + 32$$

$$1,8x + 32 = x \Rightarrow 0,8x = -32 \Rightarrow x = -40$$

Ou seja, $-40^\circ\text{C} = -40^\circ\text{F}$ (40 graus Celsius negativos é o mesmo que 40 graus Fahrenheit negativos).

2. Um número x , quando indica uma medida de temperatura em $^\circ\text{F}$, corresponde a quarta parte da medida de temperatura que indicaria em $^\circ\text{C}$. Determine esse número.

Resolução

A pergunta é equivalente a esta outra: "Para qual valor de x temos $f(x) = \frac{1}{4}x$?"

$$f(x) = 1,8x + 32$$

$$1,8x + 32 = \frac{1}{4}x \Rightarrow 1,8x - 0,25x = -32 \Rightarrow 1,55x = -32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \approx -20,6$$

Então:

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (-20,6) = -5,15$$

Assim, $-20,6^\circ\text{C}$ é equivalente a $-5,15^\circ\text{F}$.

Atividades

Não escreva no livro.

15. Para transformar graus Fahrenheit em graus Celsius, e vice-versa, usa-se a relação $\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$, em que F é a medida de temperatura em graus Fahrenheit e C é a medida de temperatura em graus Celsius.

a) Transforme 35 graus Celsius em graus Fahrenheit. **95 °F**

b) Qual é a medida de temperatura (em graus Celsius) em que a medida de temperatura em graus Fahrenheit é o dobro da medida de temperatura em graus Celsius? **160 °C**

16. Os tipos mais comuns de termômetro usam as escalas termométricas Celsius, Fahrenheit e Kelvin. É possível relacionar a escala Kelvin com as outras duas por meio das funções dadas por:

$$T_K = T_C + 273^\circ \text{ e } T_K = 5 \cdot \left(\frac{T_F - 32}{9} \right) + 273$$

Nas quais T_F , T_K e T_C representam as medidas de temperatura nas escalas Fahrenheit, Kelvin e Celsius, respectivamente. A partir dessas informações, responda: Qual é a medida de temperatura, em graus Fahrenheit, de um objeto cuja temperatura, em Kelvin, mede 328 K? **Alternativa c.**

- a) 129 °F b) 130 °F c) 131 °F d) 132 °F e) 133 °F

17. Qual é a medida de temperatura, em graus Fahrenheit, que é 5 vezes a medida de temperatura em graus Celsius? **50 °F**

18. Se um termômetro indica 120 °F, qual é a medida dessa temperatura em graus Celsius? **48,9 °C**

19. Se um termômetro indica 50 °C, qual é a medida dessa temperatura em graus Fahrenheit? **122 °F**

20. Para a Biologia, a febre é considerada um mecanismo de defesa que entra em ação quando há algo de anormal no organismo do indivíduo. Para ser considerada febre, a medida de temperatura corporal precisa estar acima de 37,8 °C, e um dos instrumentos usados durante décadas para medir essa temperatura era o termômetro de mercúrio. Nesse tipo de termômetro, a coluna de mercúrio aumenta ou diminui conforme a medida de temperatura do paciente aumenta ou diminui, respectivamente.



Termômetros de mercúrio foram muito populares há alguns anos, mas seu uso foi substituído pelos termômetros digitais, que não usam mercúrio em sua construção.

Fique atento

Desde 1ª de janeiro de 2019, foram proibidas no Brasil a fabricação, a importação e a comercialização dos termômetros de mercúrio, devido aos riscos que esse metal pode causar à saúde e ao meio ambiente.

Em um desses termômetros, a medida de comprimento da coluna de mercúrio era relacionada com a medida de temperatura do organismo pela relação $c(t) = 0,1t + 4$, em que c é a medida de comprimento da coluna, em cm, e t é a medida de temperatura, em °C. Qual era a medida de comprimento de uma coluna de mercúrio nesse termômetro quando a medida de temperatura corpórea do paciente era de 39 °C? **7,9 cm**

21. O calor é a quantidade de energia trocada entre corpos, de acordo com a diferença de temperatura entre eles. Por exemplo, ao tirar um alimento da geladeira e colocá-lo sobre a pia, o calor passa do corpo de maior temperatura (a pia) para o corpo de menor temperatura (o alimento).

Existe uma função que relaciona a quantidade de calor de um objeto com a variação da medida de temperatura dele quando o objeto não passa por mudança de fase. Essa função é dada pela lei $Q = mc\Delta t$, na qual:

- m é a medida de massa do objeto, em g;
- Q é a quantidade de calor sensível, em cal;
- c é o calor específico da substância, em cal/g · °C;
- Δt é a variação de temperatura, em °C.

Calcule a medida de temperatura final, em Kelvin, de 500 g de água após receber 10000 cal, sabendo que o calor específico da água é 1 cal/g · °C e que a água estava inicialmente a 10 °C. **Alternativa e.**

- a) 20 K b) 273 K c) 333 K d) 293 K e) 303 K

22. Reúna-se com um colega e leia a tirinha ao lado.

- a) Converse com o colega e expliquem o que o menino entendeu da conversa dos pais. Depois expliquem o que realmente aconteceu.

- b) Pesquise em jornais, revistas e sites de notícias, manchetes que associam palavras como "subir", "crescer", "descer", "cair" a temperaturas. Por que você acha que essas associações são comumente utilizadas e por que elas não são conceitualmente corretas? **A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.**

- c) Utilize uma das manchetes que vocês encontraram para elaborar um problema que envolva as escalas Celsius e Fahrenheit. Depois troque com outra dupla para que vocês resolvam o problema deles e vice-versa. **Resposta pessoal.**



BECK, Alexandre. Armandinho. Armandinho Doze. Edição do autor. p. 26. Florianópolis, 2019.

© Armandinho, de Alexandre Beck/
Acervo do cartunista

Taxa de variação média da função afim

Dados x e $x + h$ números reais, com $h > 0$, o número $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ é chamado **taxa de variação média da função f no intervalo $[x, x + h]$** .

Considerando a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, a taxa de variação média em relação a x é dada pelo número:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} = \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Portanto, para a função afim: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$

Fique atento

A notação de intervalo $[x, x + h]$ indica todos os números reais que são maiores ou iguais a x e que são menores ou iguais a $x + h$. Também podemos indicar esse intervalo como $x \leq t \leq x + h$, com $t \in \mathbb{R}$.

Observe nos próximos exemplos o uso dos colchetes abertos e fechados e a inclusão ou não dos extremos do intervalo.

$[2, 6]$: intervalo fechado à esquerda e à direita, ou $2 \leq t \leq 6$.

$]2, 6]$: intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, ou $2 < t \leq 6$.

$]2, 6[$: intervalo aberto à esquerda e à direita, ou $2 < t < 6$.

$[2, 6[$: intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, ou $2 \leq t < 6$.

Assim, a taxa de variação média, em relação a x , de uma função afim qualquer, definida por $f(x) = ax + b$, é a .

Observações:

- Como a taxa de variação média de uma função afim é constante, podemos dizer apenas **taxa de variação**.
- A taxa de variação da função afim pode ser interpretada como a variação em $f(x)$ causada por cada aumento de 1 unidade em x . Exemplos: a taxa de variação da função afim dada por $f(x) = 5x + 2$ é 5, ou seja, cada acréscimo de 1 unidade em x faz $f(x)$ aumentar 5 unidades; a taxa de variação da função definida por $g(x) = -3x + 2$ é -3 , ou seja, cada acréscimo de 1 unidade em x faz $g(x)$ diminuir 3 unidades.
- A taxa de variação da função afim pode ser obtida conhecendo-se dois dos valores dela, $f(x_1)$ e $f(x_2)$:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ para } x_1 \neq x_2.$$

Propriedade

Uma função afim é **crescente** ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) quando a taxa de variação a é positiva, e **decrescente** ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$) quando a taxa de variação a é negativa.

No caso da função afim constante (nula ou não nula), na qual $a = 0$, temos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Atividades

Não escreva no livro.

23. Escreva no caderno, para cada item, a lei da função afim definida por $f(x) = ax + b$, sabendo que:

a) $f(1) = 5$ e $f(-3) = -7$; b) $f(-1) = 7$ e $f(2) = 1$.

24. Uma aplicação financeira, feita no mês de fevereiro de 2020, variou linearmente de acordo com a medida de intervalo de tempo de aplicação. A financeira emitia

todos os dias, às 10 horas, uma mensagem via celular informando o lucro acumulado até aquele instante. No dia 10 de fevereiro, o lucro acumulado registrado foi de R\$ 150,00 e, em 20 de fevereiro, foi de R\$ 280,00.

Qual é a taxa de variação média do lucro dessa aplicação (em reais) em função da medida de intervalo de tempo (em dias)? **R\$ 13,00 por dia.**

25. Um carro encontra-se inicialmente na posição 6 m de uma trajetória retilínea e se desloca com medida de velocidade constante de 5 m/s.



- a) Qual é a equação horária da posição desse carro?

$s(t) = 6 + 5t$

Fique atento

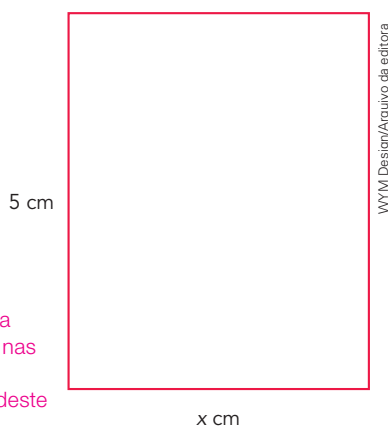
Lembre-se de que a equação horária da posição de um móvel é dada pela lei $s(t) = vt + b$, em que v é a medida de velocidade do móvel e b é a posição inicial.

- b) Desde a partida, quantos metros o carro terá percorrido após 20 segundos? 100 m
- c) Qual é a taxa de variação da posição do carro? 5 metros por segundo.
- d) Elabore um problema que envolva o conceito de posição de um móvel. Depois troque com um colega e resolva o problema dele. Resposta pessoal.

26. Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R\$ 8,00 mais um custo variável de R\$ 0,50 por unidade produzida.

- a) Qual é a lei da função afim que fornece o custo total, em reais, de x peças? $f(x) = 8 + 0,50x$
- b) Qual é a taxa de variação dessa função e o valor inicial? 0,50 e $f(0) = 8$.
- c) Calcule o custo de 100 peças. R\$ 58,00

27. Com um colega, considere o retângulo representado a seguir.



a) A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.

- a) Calcule a medida de perímetro do retângulo quando a medida de comprimento da largura x for 1 cm, 1,5 cm, 2 cm, 3 cm e 4 cm e construa uma tabela no caderno associando cada medida de comprimento da largura à medida de perímetro do retângulo.
- b) Escreva no caderno a lei da função que expressa a medida de perímetro desse retângulo em função de x . $f(x) = 10 + 2x$
- c) Informe qual é a taxa de variação dessa função e qual é o valor inicial. 2 e 10, respectivamente.

28. Na manutenção de um aquário, um dos procedimentos que deve ser feito semanalmente é a troca parcial de água (TPA), com a substituição de 20% a 30% da medida de volume de água do aquário.

Marcelo vai realizar a TPA do aquário que se encontra inicialmente cheio, com 60 litros de água. Para isso, vai usar uma mangueira que retira parte da água, de maneira contínua, com vazão de 2 litros por minuto. Qual das alternativas a seguir descreve a expressão que representa a medida de volume de água (em litros), ainda no aquário, em função da medida de intervalo de tempo (em minutos)? Alternativa b.

- a) $V(t) = 2t + 60$
- b) $V(t) = -2t + 60$
- c) $V(t) = 2t - 60$
- d) $V(t) = -2t - 60$
- e) $V(t) = 60t - 2$

29. O preço do aluguel de 3 modelos de carro popular é dado por uma taxa fixa, como indicado abaixo, além de uma cobrança de R\$ 0,37 por quilômetro rodado.

A	Taxa fixa de R\$ 50,00
B	Taxa fixa de R\$ 63,00
C	Taxa fixa de R\$ 75,00

- a) Escreva no caderno a lei da função afim que expressa o preço do aluguel de cada modelo de carro, chamando de x o número de quilômetros rodados.

- b) Qual é a taxa de variação de cada função? 0,37 em todas as funções.

30. Um tanque estava inicialmente com 10 litros de água. A torneira que abastece esse tanque foi aberta, enchendo-o de água com vazão de 5 litros por segundo.

- a) Escreva no caderno a lei da função afim que representa a quantidade de água nesse tanque, em litros, após t segundos. $f(t) = 10 + 5t$

- b) Qual é a taxa de variação da função afim obtida? 5

- c) Qual é o valor inicial da função afim obtida? 10

- d) Reformule a situação do enunciado, modificando os valores apresentados. Em seguida, elabore um problema de acordo com essa reformulação, troque-o com um colega e resolva o problema elaborado por ele. Resposta pessoal.

31. Uma barra de cobre é exposta a várias medidas de temperatura. A medida de comprimento ℓ é dada em função da medida de temperatura C ; e essa função é afim. Determine a lei que expressa ℓ (em centímetros) em função de C (em graus Celsius), a partir dos dados:

- $C_1 = 15^\circ\text{C}$ e $\ell_1 = 76,45$ cm;
- $C_2 = 100^\circ\text{C}$ e $\ell_2 = 76,56$ cm. $\ell = \frac{11}{8500}C + \frac{32483}{425}$

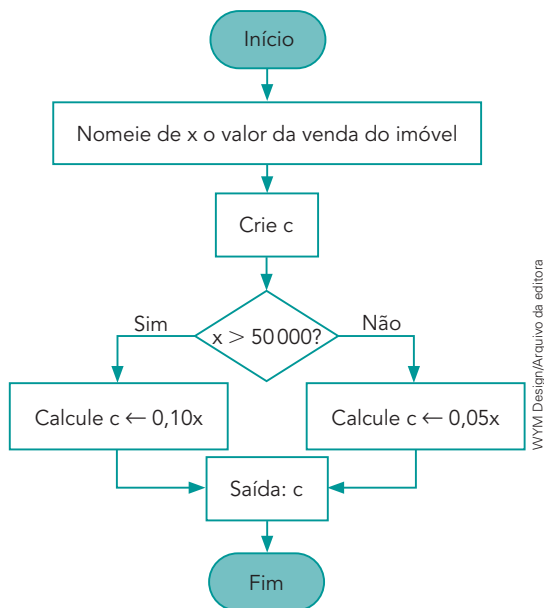
32. Um grande poluente produzido pela queima de combustíveis fósseis é o dióxido de enxofre (SO_2). Uma pesquisa demonstrou que o número (N) aproximado de peixes mortos em certo rio, por semana, é dado por uma função afim da concentração C de SO_2 .

Concentração (em $\mu\text{g}/\text{m}^3$)	401	500
Número de peixes mortos	106	109

Sabendo que se o número de mortes ficar acima de 115 pode levar a problemas de reprodução da espécie, qual é a concentração máxima de SO_2 que pode ser despejada no rio para que a reprodução da espécie não seja prejudicada? **698 $\mu\text{g}/\text{m}^3$**

33. Sabendo que o lucro de uma imobiliária depende do valor de venda dos imóveis, ela utiliza um programa de computador que efetua o cálculo desse valor. O funcionamento desse programa está descrito no fluxograma a seguir.

Fluxograma é um tipo de representação visual que auxilia a análise de processos em diversos contextos, como os computacionais e os empresariais. Geralmente eles indicam uma etapa inicial e uma etapa final e a leitura é feita a partir da etapa inicial, que leva a outras etapas seguindo a direção das setas.



- a) Escreva no caderno a lei da função que expressa o lucro, em reais, quando o valor de venda do imóvel é superior a R\$ 50.000,00. **$c = 0,10x$**
- b) Escreva a lei que expressa o lucro, em reais, quando o valor de venda do imóvel é inferior ou igual a R\$ 50.000,00. **$c = 0,05x$**
- c) Utilizando o fluxograma, responda: Se um imóvel for vendido por R\$ 25.000,00, qual será o lucro? E se for vendido por R\$ 60.000,00? **R\$ 1.250,00. R\$ 6.000,00.**

34. Ao nível do mar (medida de altitude zero), a água ferve a 100 °C. Entretanto, quanto mais alto estivermos, menor será a medida de temperatura de ebulição da água. No topo do monte Everest, por exemplo, que está a quase 9000 m de medida de altitude, a água ferve a 70 °C, aproximadamente. Essa relação pode ser expressa pela função dada por $t(a) = -\frac{a}{300} + 100$, em que t é a medida de temperatura de ebulição da água, em °C, e a é a medida de altitude, em metro, em que se encontra a água a ser fervida. Suponha que um grupo de pessoas chegou ao topo do pico da Neblina, com cerca de 3000 m de medida de altitude. Qual é, aproximadamente, a medida de temperatura de ebulição da água no topo do pico da Neblina? E na região do mar Morto, que fica em uma profunda depressão, onde a medida de altitude é -430 m (430 m abaixo do nível do mar)? **Aproximadamente 90 °C; aproximadamente 101,43 °C.**



Marcos Amendo/Pulsar Imagens

O Pico da Neblina, que fica no município de Santa Isabel do Rio Negro (AM), é o ponto mais alto do Brasil. Por isso, tanto o pico quanto o parque ao redor, o Parque Nacional do Pico da Neblina, são visitados anualmente por turistas. Foto de 2017.

35. Em um condomínio de escritórios, 2 salas dispõem de aparelhos de ar condicionado que começam a funcionar automaticamente quando o ambiente da sala atinge determinada medida de temperatura.

Na sala A, quando a medida de temperatura é 28 °C, o aparelho é ligado e a medida de temperatura decresce linearmente a uma taxa de 0,8 °C por minuto.

Na sala B, quando a medida de temperatura chega a 30 °C, o aparelho é ligado e a medida de temperatura decresce, também linearmente, a uma taxa de 0,9 °C por minuto.

Esses aparelhos são programados para serem desligados ao completarem 10 minutos de funcionamento.

Responda no caderno:

- a) Qual é a medida de temperatura de cada sala quando os aparelhos são desligados? **Sala A: 20 °C; sala B: 21 °C.**
- b) Supondo que fossem ligados no mesmo instante e não fossem desligados automaticamente, depois de quantos minutos as salas A e B estariam a uma mesma medida de temperatura? **20 min**

36. Ao aquecer substâncias no estado gasoso é possível observar que elas se expandem, mas se forem resfriadas, elas se contraem; isso pode ser verificado experimentalmente. Ao encher uma bexiga e colocá-la no congelador, a bexiga encolhe.



Nesse contexto, as medidas de temperatura e as medidas de volume correspondentes podem ser modeladas de acordo com uma função afim.

- a) Suponha que determinado gás tenha medida de volume igual a 500 cm^3 a 27°C e medida de volume igual a 605 cm^3 a 90°C . Escreva no caderno a lei da função que modela esses dados. $V = \frac{5}{3}t + 455$
- b) Use a lei da função que você escreveu no item a e descubra a que medida de temperatura, em graus Celsius, a medida de volume do gás é igual a 0 cm^3 . Ao fazer isso, você vai calcular a menor medida de temperatura possível. Essa medida de temperatura é chamada de zero absoluto. -273°C
37. Na Física, a força que um objeto cuja massa mede m exerce em uma parede depende, além da massa, da

aceleração desse objeto. Essa força é dada pela expressão $F = m \cdot a$, em que F é a intensidade da força, em Newton, m é a medida de massa do objeto, em kg, e a é a intensidade da aceleração do objeto, em m/s^2 . Essa lei é conhecida como a segunda lei de Newton.

Para que a força exercida pelo objeto meça 10000 N , de quanto deve ser a intensidade da aceleração, em m/s^2 , de um objeto cuja massa mede 20 kg ? 500 m/s^2

38. O proprietário de uma fábrica de chinelos verificou que, quando se produziam 600 pares de chinelos por mês, o custo mensal da empresa era de R\$ 14.000,00 e, quando se produziam 900 pares, o custo mensal era de R\$ 15.800,00. A função que representa a relação entre o custo mensal (C) e o número de chinelos produzidos por mês (x) é uma função afim.

- a) Obtenha C em função de x . $C(x) = 6x + 10400$
- b) Se a capacidade máxima de produção da empresa é de 1200 chinelos por mês, qual é o custo mensal máximo? R\$ 17.600,00

39. Um ponto material percorre um trajeto retilíneo com medida de velocidade constante. A posição desse ponto material no instante $t_0 = 0 \text{ s}$ é $S_0 = 100 \text{ m}$ e no instante $t = 5,0 \text{ s}$ é $S = 400 \text{ m}$.



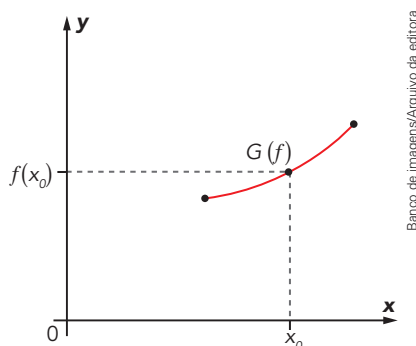
Nessas condições, determine no caderno:

- a) a medida de velocidade desse ponto material; 60 m/s
- b) a lei da função da posição em relação à medida de intervalo de tempo; $S = 60t + 100$
- c) a posição no instante $t = 10 \text{ s}$; 700 m
- d) o instante em que a posição é $S = 1000 \text{ m}$. 15 s

Gráfico de funções

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, o gráfico dela é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) , para $x \in A$, $y \in B$ e $y = f(x)$, ou seja, $G(f) = \{(x, y); x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$.

Por exemplo, observe a seguir o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Construção do gráfico de funções afins em planilha eletrônica

Acompanhe como construir o gráfico de funções afins utilizando o **software livre** LibreOffice. Ele oferece 6 aplicativos: editor de texto, planilha eletrônica, editor de apresentação de slides, editor de desenho, editor de fórmulas e banco de dados.

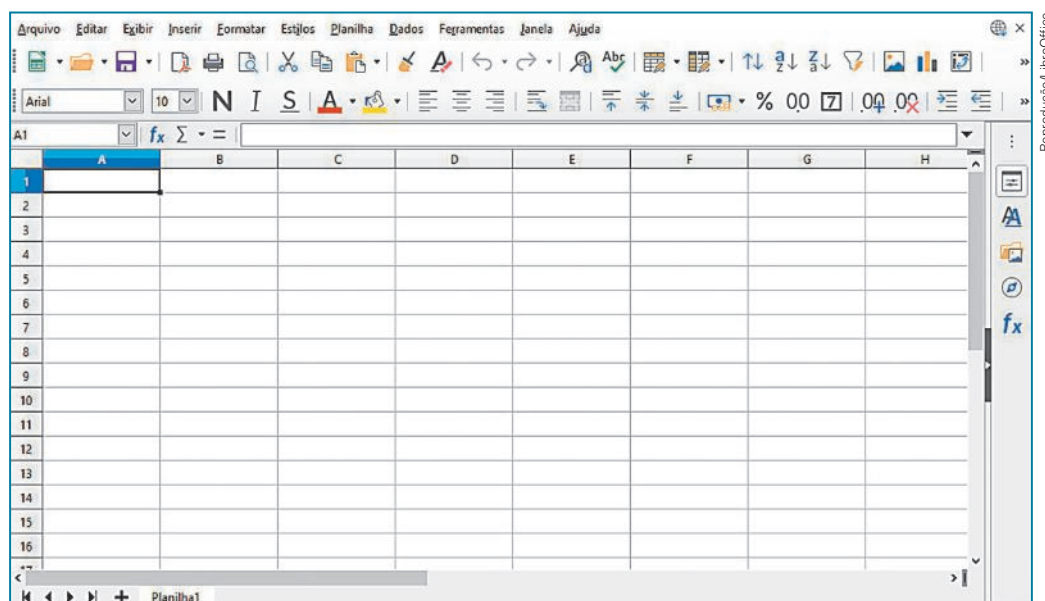
A instalação desse *software* é simples: acesse o site <https://pt-br.libreoffice.org/> (acesso em: 9 abr. 2020), clique em “Baixe já”, escolha a versão de acordo com o sistema operacional do seu computador e siga os passos para finalizar a instalação do programa.

Ao abrir o LibreOffice, clique em “Planilha do Calc” e observe que a planilha eletrônica é formada por linhas (**1, 2, 3, 4, ...**) e colunas (**A, B, C, D, ...**).

Software livre

Qualquer programa gratuito de computador cujo código-fonte deve ser disponibilizado para permitir o uso, o estudo, a cópia e a redistribuição.

Professor, o *software* LibreOffice será usado como ferramenta para auxiliar na construção de gráficos ao longo deste e de outros volumes desta coleção.



Tela inicial do LibreOffice Calc.

Agora, siga os passos para construir uma parte do gráfico da função f dada por $f(x) = x + 3$.

1º passo: Vamos montar uma tabela com valores de x e $f(x)$. A coluna **A** será formada pelos valores da variável independente x , e a coluna **B**, pelos valores da variável dependente $f(x)$. Preencha as células A1 e B1 com x e $f(x) = x + 3$, respectivamente.

Nas células A2, A3, A4, ..., A12, preencha com os valores $-5, -4, -3, \dots, 4, 5$.

Na célula B2, digite **=A2+3**. Assim, o valor assumido na célula B2 será igual ao valor apresentado na célula A2 acrescido de 3 unidades. Em seguida tecele “Enter”.

	A	B
1	x	$f(x) = x + 3$
2	-5	$=A2 + 3$
3	-4	
4	-3	
5	-2	
6	-1	
7	0	
8	1	
9	2	
10	3	
11	4	
12	5	
13		

Destaque da tela do LibreOffice Calc depois do 1º passo.

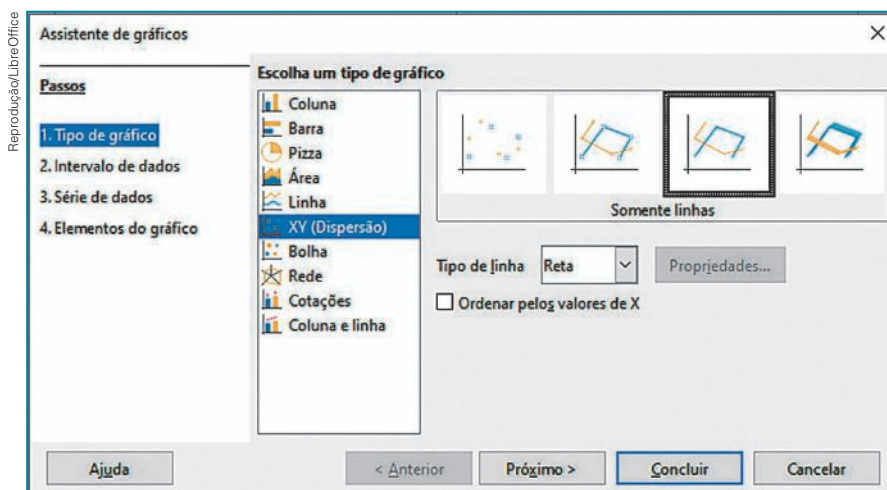
2º passo: Clique com o botão esquerdo do mouse no quadradinho no canto inferior direito da célula B2 (alça de preenchimento) utilizando o recurso “Arrastar e soltar” e deslize até a célula B12.

Ao soltar o mouse, aparecerão na coluna **B** os valores que obedecem à lei de formação da função f para cada valor indicado na coluna **A**.

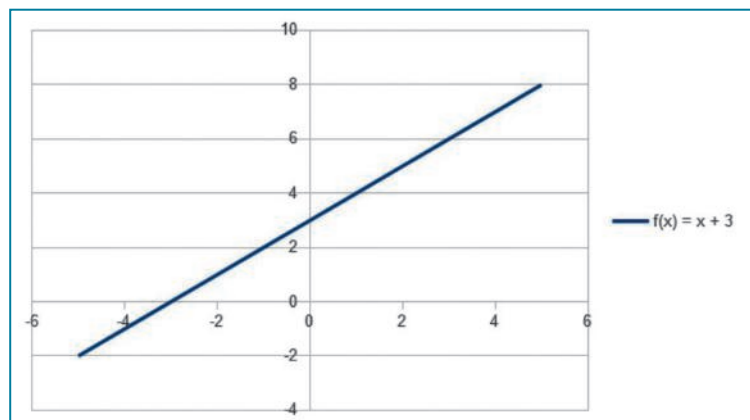
3º passo: Selecione a tabela construída e, no menu “Inserir”, clique na opção “Gráfico”. Na janela “Assistente de gráficos”, selecione a opção “XY (Dispersão)” e “Somente linhas”, conforme as referências visuais. Depois, clique em “Concluir” e o gráfico será construído automaticamente.

	A	B
1	x	$f(x) = x + 3$
2	-5	-2
3	-4	-1
4	-3	0
5	-2	1
6	-1	2
7	0	3
8	1	4
9	2	5
10	3	6
11	4	7
12	5	8
13		

Destaque da tela do LibreOffice Calc após o 2º passo.



Destaque da tela do LibreOffice Calc durante o 3º passo.



Destaque da tela do LibreOffice Calc após o 3º passo.

Observe que, neste caso, construímos o gráfico da função afim f apenas para os valores de -5 a 5 do domínio.

1. Repita os passos utilizando os mesmos valores de x para construir as partes dos gráficos das funções f e g dadas pelas leis $f(x) = x - 3$ e $g(x) = 2x + 1$, respectivamente.
2. Considere as tabelas a seguir, que mostram dois conjuntos de dados distintos.

Conjunto de dados 1

A_1	0	1	2	3	4
B_1	1	2	5	10	17

Conjunto de dados 2

A_2	0	1	2	3	4
B_2	1	3	5	7	9

Usando o LibreOffice, monte um gráfico para representar cada um dos conjuntos de dados do item anterior e responda no caderno: Qual dos dois conjuntos de dados representa uma relação que pode ser modelada por uma função afim? Qual é a lei dessa função?

Os gráficos encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

O conjunto de dados 2, pois os dados apresentam taxa de variação constante. $f(x) = 2x + 1$.

Construção do gráfico de funções afins no GeoGebra

Vamos agora utilizar o **GeoGebra** para construir gráficos de funções afins.

O GeoGebra é um *software* livre de Matemática. Criado pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter (1976-), recebeu diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos. Esse *software* pode ser utilizado em diversos conteúdos de Números, Álgebra e Geometria. Faremos uso dele, neste momento, para construir o gráfico de funções afins no plano cartesiano e para explorar os gráficos antes das formalizações.

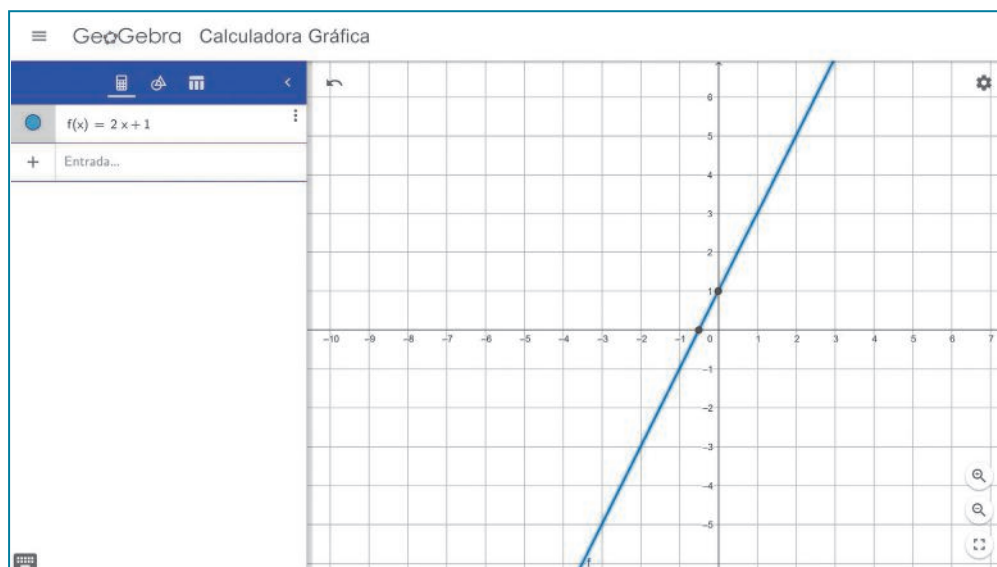
Há diversas opções de uso do GeoGebra Calculadora Gráfica. Em computadores, é possível fazer o *download* no site www.geogebra.org/?lang=pt (acesso em: 9 abr. 2020); em *smartphones*, pode-se baixá-lo na loja oficial de aplicativos do sistema operacional do aparelho; ou pode-se acessá-lo *on-line*.

As imagens que utilizaremos a seguir são da versão *on-line*. Mas é possível escolher a plataforma que for mais oportuna.

Ao abrir o programa, acesse as configurações de exibição (na parte superior direita da tela) e selecione as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal.

Vamos construir o gráfico da função afim dada por $f(x) = 2x + 1$ e destacar alguns pontos importantes. Para isso, siga os passos indicados.

1º passo: No campo de Entrada, digite a lei da função **$f(x)=2*x+1$** e tecla "Enter". Observe que "*" indica a operação de multiplicação.



Tela do GeoGebra após o 1º passo.

2º passo: No campo de Entrada, digite as coordenadas dos pontos **$A=(-2, -3)$** , **$B=(-1, -1)$** , **$C=(-1/2, 0)$** , **$D=(0, 1)$** e **$E=(1, 3)$** (a cada ponto inserido tecla "Enter"). Verifique que todos os pontos pertencem ao gráfico da função, que é uma reta.

Fique atento

Neste livro denotamos os pontos como $A(-2, -3)$. Mas no *software* GeoGebra os pontos devem ser escritos na forma **$A=(-2,-3)$** , usando o sinal de igual.

Professor, este *software* será usado como ferramenta para auxiliar na construção de gráficos ao longo deste e dos próximos volumes desta coleção.

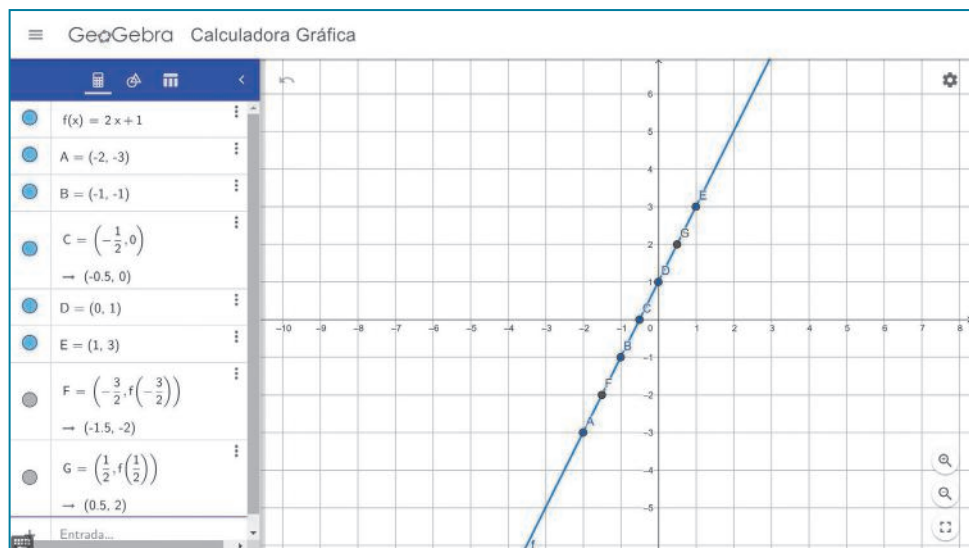
Fique atento

Você pode mover a imagem no GeoGebra clicando em algum ponto da tela e arrastando. Você também pode ampliar ou reduzir a imagem usando as ferramentas de zoom (na parte inferior direita da tela) ou utilizando o *scroll* do mouse (a "rodinha" que fica na parte superior da maioria dos mouses).

3º passo: Agora vamos criar pontos de uma maneira diferente: Digite no campo de Entrada

$F = (-3/2, f(-3/2))$ e $G = (1/2, f(1/2))$, para criar os pontos $F(-\frac{3}{2}, f(-\frac{3}{2}))$ e $G(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$.

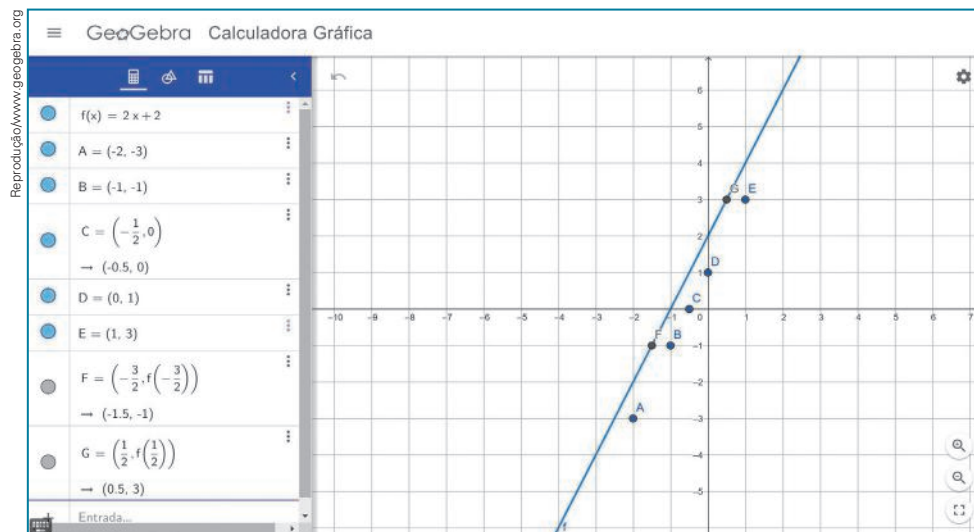
Podemos perceber que o GeoGebra identificou as maneiras diferentes de representação dos pontos e atribuiu cores diferentes a eles. Os pontos A, B, C, D e E não dependem da função, enquanto os pontos F e G são dependentes. Tente clicar, segurar e arrastar os pontos para fora da reta e observe que com os primeiros conseguirá e com os últimos não.



Tela do GeoGebra após o 3º passo.

4º passo: Agora, vamos alterar a lei da função f para observar e verificar o comportamento do gráfico dessa nova função e dos pontos inseridos anteriormente.

Para isso, dê um duplo clique na função (no campo de Entrada) e substitua o coeficiente b (valor inicial) de 1 por 2.



Tela do GeoGebra após o 4º passo.

Podemos perceber que os pontos que foram inseridos no GeoGebra na forma $(x, f(x))$, que são os pontos F e G, continuaram pertencendo ao gráfico da função f depois da alteração da lei dela. Já os pontos que não foram inseridos dessa maneira (os pontos A, B, C, D e E) não mudaram de posição e, por isso, não são mais pontos pertencentes ao gráfico da função f .

1. Responda no caderno às perguntas a seguir.

- Qual valor devemos adicionar à ordenada dos pontos A, B, C, D e E após o 4º passo da atividade para que esses pontos pertençam ao gráfico da função definida por $f(x) = 2x + 2$? **1 unidade.**
- Por qual valor deve ser trocado o coeficiente b (valor inicial) em $f(x) = 2x + 2$ para que o gráfico de f passe pela origem $(0, 0)$ do plano cartesiano? Construa no GeoGebra o gráfico da função f depois dessa modificação e verifique sua resposta. **Por 0. O gráfico encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.**

Gráfico da função afim

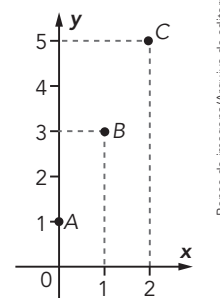
Não escreva no livro.

Para construir no plano cartesiano o gráfico de uma função afim f de domínio discreto e limitado (isto é, $D(f)$ é formado por um número limitado de valores), podemos seguir os seguintes passos:

- 1ª) construir uma tabela com valores x do domínio $D(f)$ e com valores correspondentes para $y = f(x)$;
- 2ª) associar um ponto do plano cartesiano a cada par ordenado (x, y) da tabela;
- 3ª) marcar os pontos do quadro no plano cartesiano.

Por exemplo, acompanhe a construção do gráfico da função dada por $f(x) = 2x + 1$, sendo o domínio $D(f) = \{0, 1, 2\}$.

x	$y = f(x) = 2x + 1$
0	1
1	3
2	5

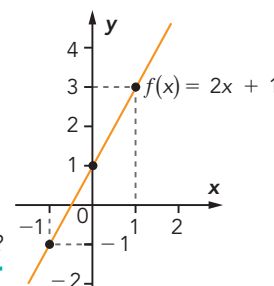


Banco de Imagens/Arquivo da editora

No caso de uma função afim de domínio real, dada pela lei $f(x) = ax + b$, é possível demonstrar que o gráfico dela é uma reta. Como toda reta pode ser determinada por dois pontos distintos pertencentes a ela, para construir o gráfico de uma função afim de domínio real, basta escolher dois pontos distintos do domínio e seguir os passos acima, traçando uma reta que passe pelos pontos marcados após o 3º passo.

Por exemplo, para construir o gráfico da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$, como, nesse caso, $D(f) = \mathbb{R}$, podemos escolher dois valores arbitrários de x e determinar os valores correspondentes y .

x	$y = f(x) = 2x + 1$
-1	-1
1	3



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Refleta

Por que os gráficos dos dois exemplos são diferentes se a lei das duas funções é $f(x) = 2x + 1$?

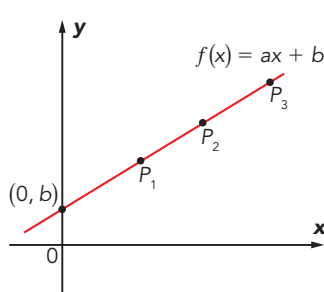
Porque, no primeiro exemplo, $D(f) = \{0, 1, 2\}$ e, no segundo exemplo, $D(f) = \mathbb{R}$.

O gráfico é o conjunto de todos os pontos (x, y) , com x real e $y = 2x + 1$, resultando na reta representada acima.

O coeficiente a , que é a **taxa de variação** da função f , também é conhecido como **declividade** ou **coeficiente angular** da reta em relação ao eixo x .

O coeficiente b , que é o **valor inicial** da função f , também é conhecido como **coeficiente linear** da reta.

Geometricamente, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é gráfico da função dada pela lei $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo y . Perceba que, para $x = 0$, temos $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste tópico encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

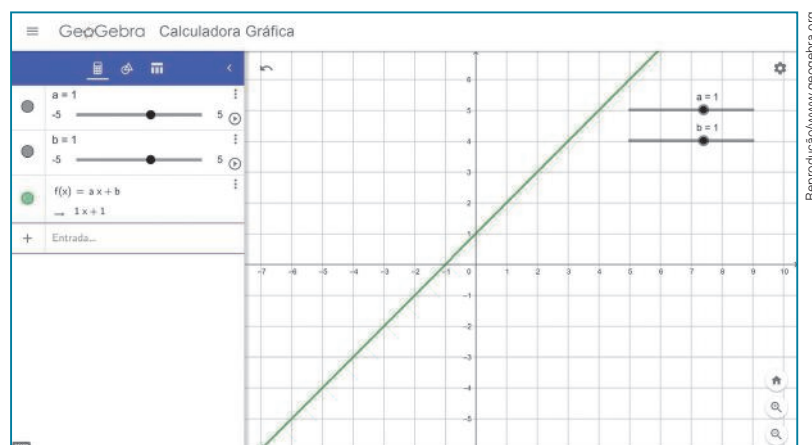
Análise dos coeficientes da função afim no GeoGebra

Vamos utilizar novamente o GeoGebra Calculadora Gráfica, agora para analisar os coeficientes de uma função afim. Em uma janela do GeoGebra, acesse as configurações de exibição (na parte superior direita da tela) e selecione as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal. Depois siga os passos abaixo.

1ª passo: Na barra de ferramentas, selecione a opção “Controle deslizante” e, em seguida, clique em qualquer parte da janela de visualização. Nesse instante, abrirá uma caixa de diálogo definindo o parâmetro a com valor inicial igual a 1 e variando de -5 a 5 . Clique em Ok.

Repita a operação e insira um novo parâmetro b , também com valor inicial igual a 1.

Depois, digite no campo de Entrada: $f(x)=ax+b$. Essa operação vai criar o gráfico da função de lei $f(x) = ax + b$. Como tanto a quanto b são iguais a 1, o gráfico exibido será da função dada por $f(x) = x + 1$.



Tela do GeoGebra após o 1ª passo.

2ª passo: Agora você poderá observar significados importantes para os coeficientes a e b . Clique no Controle deslizante de a e altere lentamente o valor dele (basta clicar, segurar e arrastar a bolinha para um dos lados). Observe o que acontece com o gráfico da função. Repita a operação para o Controle deslizante de b (utilize um Controle deslizante por vez).

1. Considere a construção que você fez da função afim dada por $f(x) = ax + b$ e os passos anteriores.

As respostas encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.

- a) O que ocorre quando modificamos o valor do coeficiente a , de modo que assumamos valores negativos, valores positivos e valores nulos, no gráfico da função f ?
- b) E o que ocorre quando modificamos o valor do coeficiente b , de modo que assumamos valores negativos, valores positivos e valores nulos, no gráfico da função f ?

2. Uma pessoa, ao pesquisar na internet o preço de alguns livros, encontrou os produtos que queria em 2 lojas virtuais distintas. O valor dos livros era o mesmo, porém em cada loja o cálculo do valor do frete era diferente. Na loja **A**, pagava-se um fixo de R\$ 5,00 mais R\$ 3,00 por livro comprado. Na loja **B**, pagava-se um fixo de R\$ 10,00 mais R\$ 2,00 por livro.

- a) Qual é a lei da função que relaciona o valor do frete, em reais, com o número de livros adquiridos em cada uma das lojas? Loja **A**: $P_A(x) = 3x + 5$; loja **B**: $P_B(x) = 2x + 10$.
- b) Para comprar 4 livros, qual valor de frete é mais barato: na loja **A** ou na loja **B**? Na loja **A**.
- c) Usando o GeoGebra, construa o gráfico das duas funções em um mesmo plano cartesiano, identifique o ponto de intersecção das 2 retas e interprete como esse ponto pode ser utilizado para analisar em quais situações comprar em cada uma das lojas é mais vantajoso financeiramente.

A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.

Traçado de gráficos de funções afins

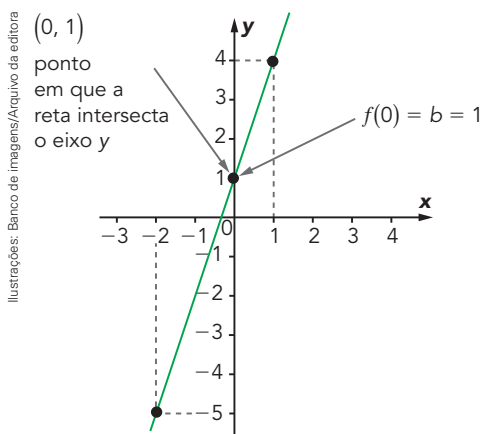
Vamos construir os gráficos de algumas funções afins, dadas por $f(x) = ax + b$, no plano cartesiano.

Como o gráfico da função afim é uma reta e, para traçar uma reta, basta conhecermos dois pontos distintos pertencentes a ela, então determinamos dois pontos distintos da função e traçamos a reta.

Veja alguns exemplos.

a) $f(x) = 3x + 1$

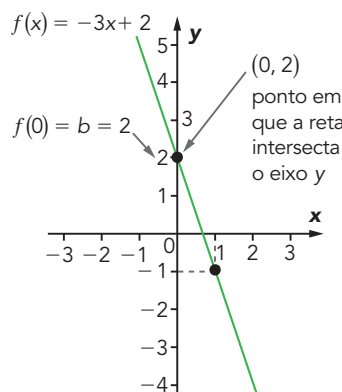
x	$f(x)$
-2	-5
1	4



Nesse caso, temos $a = 3$ ($a > 0$), portanto a função f é crescente e o gráfico da função é **ascendente** ("sobe" da esquerda para a direita).

b) $f(x) = -3x + 2$

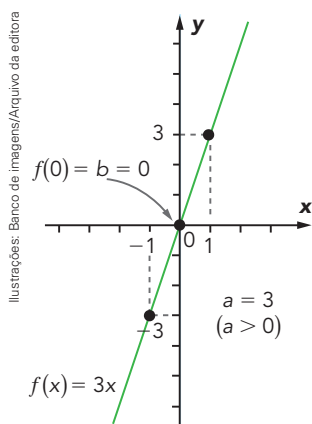
x	$f(x)$
0	2
1	-1



Nesse caso, temos $a = -3$ ($a < 0$), então a função é decrescente e o gráfico da função é **descendente** ("desce" da esquerda para a direita).

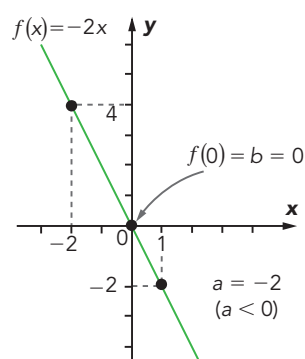
c) $f(x) = 3x$

x	$f(x)$
-1	-3
1	3



d) $f(x) = -2x$

x	$f(x)$
-2	4
1	-2



Fique atento

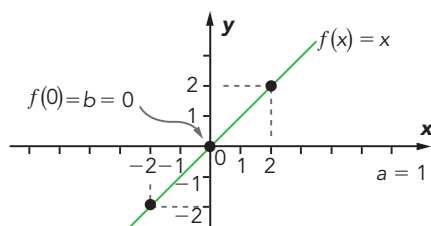
A **função linear**, dada pela lei $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, é um caso particular da função afim. As funções dos exemplos **c** e **d** são funções lineares.

O gráfico de uma função linear é uma reta não vertical que passa pela origem $(0, 0)$.

Porque o gráfico da função identidade é uma reta que divide os ângulos que delimitam esses dois quadrantes em ângulos de mesma medida.

e) $f(x) = x$

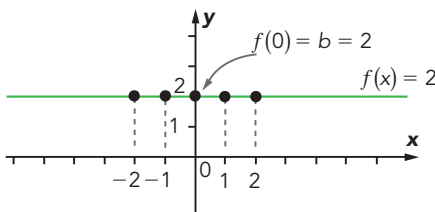
x	$f(x)$
-2	-2
2	2



Banco de imagens/Arquivo da editora

f) $f(x) = 2$

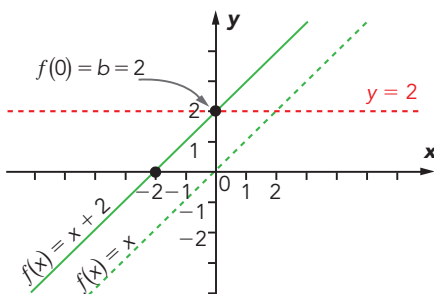
x	$f(x)$
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2



Banco de imagens/Arquivo da editora

g) $f(x) = x + 2$

x	$f(x)$
-2	0
0	2



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro.

Fique atento

A **função identidade**, dada pela lei $f(x) = x$, é um caso particular da função afim. A função identidade também é uma função linear. O gráfico dela é a bissetriz dos 1º e 3º quadrantes.

Refleta

Por que o gráfico da função identidade (função do exemplo e) é a bissetriz dos 1º e 3º quadrantes?

Fique atento

A função do exemplo f é uma **função constante**. O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ou coincidente com o eixo x que passa pelo ponto $(0, b)$. Nesse caso, $\text{Im}(f) = \{b\}$.

Atividades resolvidas

3. Calcule e indique no caderno a taxa de variação da função cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $A(1, 3)$ e $B(5, 6)$. Verifique se essa função afim é crescente ou decrescente.

Resolução

Sabemos que: $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, para $x_1 \neq x_2$.

Em $A(1, 3)$, temos $f(1) = 3$ e, em $B(5, 6)$, temos $f(5) = 6$.

$$\text{Assim, } a = \frac{6 - 3}{5 - 1} = \frac{3}{4}.$$

Portanto, a taxa de variação de $f(x)$ é igual a $\frac{3}{4}$.

Como $\frac{3}{4} > 0$, a função é crescente.

4. Um motociclista percorre uma estrada movimentando-se de acordo com a função horária dada por $S(t) = 100t - 50$, em que $S(t)$ representa a posição (em km) e t representa a medida de intervalo de tempo (em h) dele. Depois de quantas horas o motociclista passa pelo marco do quilômetro zero (km 0)?

Resolução

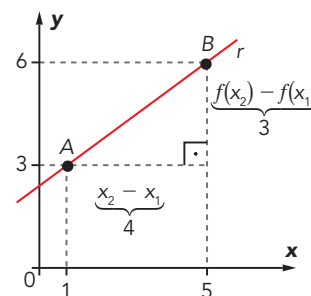
Para que o motociclista passe pelo marco do km 0, devemos ter $S(t) = 0$. Logo:

$$0 = 100t - 50 \Rightarrow 100t = 50 \Rightarrow t = \frac{50}{100} \Rightarrow t = 0,5$$

O motociclista passa pelo quilômetro zero depois de 0,5 h.

Interpretação

A função dada por $S(t) = 100t - 50$ é uma função afim cuja lei é do tipo $S(t) = vt + S(0)$.



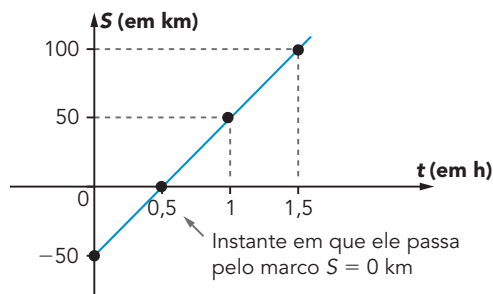
Banco de imagens/Arquivo da editora

Quando $t = 0$, temos $S(0) = -50$ km, que representa a posição inicial que o motociclista ocupava no início do movimento (estava 50 km antes do marco km 0). Ele se movimentava com medida de velocidade constante de 100 km/h para a frente (velocidade positiva), isto é, $v = 100$ km/h.

Para que ele chegue ao marco do km 0 partindo do marco -50 km, ele precisa percorrer uma medida de distância de 50 km. Como se desloca com medida de velocidade constante de 100 km/h, temos:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ km} \quad \quad 1 \text{ h} \\ 50 \text{ km} \quad \quad t \\ t = 0,5 \text{ h} \end{array}$$

Graficamente, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

5. A tabela a seguir fornece a posição $S(t)$, em km, ocupada por um veículo, em relação ao km 0 da estrada em que se desloca em movimento uniforme, para vários instantes t (em h).

Deslocamento de um veículo

t (em h)	0	2	4	6	8	10
$S(t)$ (em km)	50	100	150	200	250	300

Tabela elaborada para fins didáticos.

- a) Qual é a lei da função horária que descreve a posição desse veículo em função da medida de intervalo de tempo?
b) Em que instante o veículo ocupará a posição $S = 500$ km?

Resolução

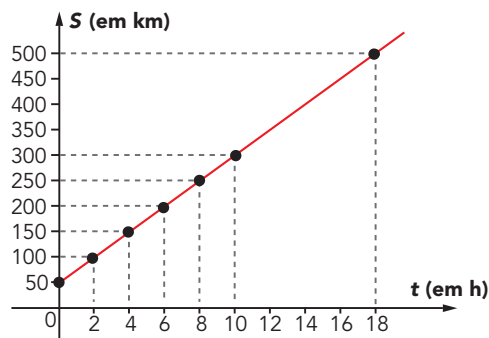
- a) Pelo enunciado, a medida de velocidade do móvel é constante (movimento uniforme). Como $v = \frac{S}{t}$, temos $v = \frac{50 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 25$ km/h. No início ($t = 0$), o veículo ocupa a posição inicial $S(0) = 50$. Como o movimento é uniforme, podemos descrever a posição por uma função afim dada por $S(t) = vt + S(0)$. Assim, $S(t) = 25t + 50$. Basta substituir t por alguns valores da tabela para verificar se a posição S corresponde ao valor calculado.

- b) Para encontrar o instante em que o veículo ocupa a posição $S = 500$ km, fazemos:

$$S(t) = 25t + 50 \Rightarrow 500 = 25t + 50 \Rightarrow 25t = 450 \Rightarrow t = \frac{450}{25} = 18,$$

ou seja, $t = 18$ h. Logo, $S = 500$ km após 18 h do início do movimento. Graficamente, temos:

O gráfico da função afim dada por $S(t) = vt + S(0)$ é uma reta que intersecta o eixo S em $(0, S(0)) = (0, 50)$, ou seja, $S(t) = 25t + 50$. Prolongando a reta até a posição $S = 500$ km, obtemos $t = 18$.



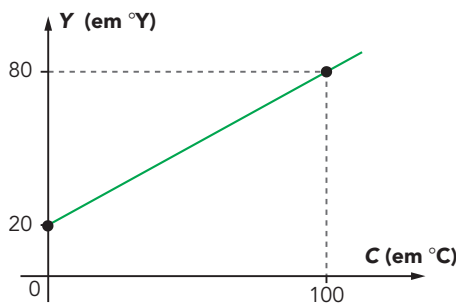
Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Não escreva no livro.

40. O custo de um produto é calculado pela lei $c = 10 + 20q$, na qual c indica o custo (em reais) e q , a quantidade produzida (em unidades). Utilize régua milimetrada e construa no caderno o gráfico de c em função de q , depois compare com o gráfico de um colega para verificar as construções.

41. Em uma viagem, Pedro ouviu de um turista que a medida de temperatura máxima para aquele dia seria $36,8^\circ\text{Y}$. Curioso para saber a medida dessa temperatura na escala Celsius, Pedro, que é estudante de Física, fez a leitura de 2 medidas de temperaturas com termômetros graduados em $^\circ\text{Y}$ e $^\circ\text{C}$ e montou o gráfico abaixo.



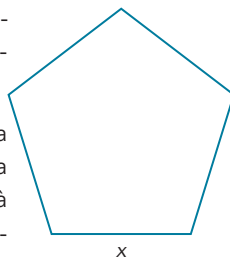
Banco de Imagens/Arquivo da editora

De acordo com os valores expressos no gráfico, qual é a lei da função que representa a relação termométrica entre a medida de temperatura na escala Y e na escala Celsius?

Alternativa c.

- a) $Y = C + 20$ d) $Y = 20C + 0,6$
 b) $Y = 0,06C + 20$ e) $Y = 0,6C - 20$
 c) $Y = 0,6C + 20$

42. A figura a seguir mostra um pentágono regular cujo comprimento do lado mede x .



Banco de Imagens/Arquivo da editora

- a) Construa no caderno uma tabela associando a medida de comprimento do lado (x) à respectiva medida de perímetro (p) do pentágono regular para pelo menos 4 valores de x . *A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.*
 b) Se a medida de comprimento do lado dobra ou triplica, o que acontece, respectivamente, com a medida de perímetro?
A medida de perímetro dobra e triplica, respectivamente.
 c) Determine a lei de formação da função que fornece a medida de perímetro p do pentágono regular em função da medida de comprimento x do lado.
 $p(x) = 5x$
 d) Construa no caderno o gráfico da função p cuja lei foi determinada no item anterior. *A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.*
 e) Como é chamado esse tipo de variação que você observou da medida de perímetro em relação à medida de lado do pentágono? *Variação linear ou constante.*

- f) A função p é uma função linear? E é uma função identidade? *Sim. Não.*

43. Uma pessoa que tinha certa quantia fez compras em 3 lojas:

- na 1ª loja gastou a quinta parte do que tinha;
- na 2ª loja gastou a metade do que havia sobrado;
- na 3ª loja gastou R\$ 10,00.

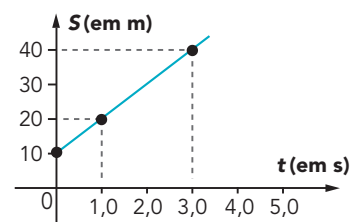
- a) Qual é a lei que indica a quantia Q que restou em função da quantia inicial x ? $Q = \frac{2x}{5} - 10$

- b) Quanto restou se a quantia inicial era de R\$ 40,00? *R\$ 6,00*

- c) Qual deve ser a quantia inicial para que, no final, restem R\$ 4,40? *R\$ 36,00*

- d) Construa no caderno o gráfico dessa função para x tal que $25 \leq x \leq 100$. *A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.*

44. Analise o gráfico da posição (S) de um ponto material dada em função da medida de intervalo de tempo (t) e determine no caderno:



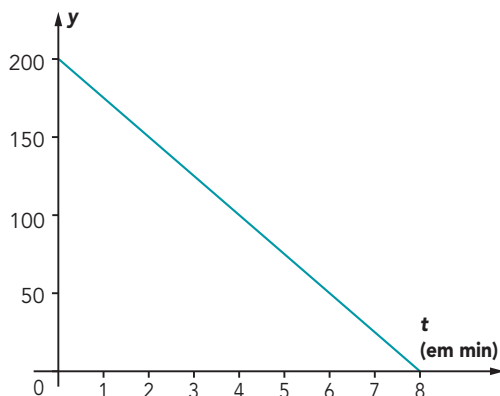
Banco de Imagens/Arquivo da editora

- a) a medida de velocidade desse ponto material;
 $v = 10 \text{ m/s}$
 b) a lei da função do movimento desse ponto material;
 $S = 10t + 10$
 c) a posição desse ponto material no instante $t = 3,0 \text{ s}$.
 40 m

45. A medida de volume V , em litros, de água de uma piscina que está sendo esvaziada é dada pela lei $V(t) = -60t + 4320$, em que t é a medida de intervalo de tempo em horas.

- a) Calcule a medida de volume de água contida na piscina exatamente 3 horas e meia depois que ela começou a ser esvaziada. *4 110 L*
 b) Determine a medida de intervalo de tempo necessária para a piscina esvaziar totalmente. *72 h*
 c) Construa no caderno um gráfico demonstrativo da situação. *A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.*
 d) Modifique a situação indicada no enunciado. Para isso, escolha uma nova medida de volume inicial para a piscina, em litros, e uma nova taxa de esvaziamento, em litros por hora. Em seguida escreva no caderno o novo enunciado utilizando esses valores e faça o que é pedido nos itens **a**, **b** e **c** considerando o novo enunciado. *Resposta pessoal.*

46. Um estabelecimento em situação de emergência retira de maneira organizada todos os convidados em segurança, usando uma única saída de emergência, em apenas 8 minutos. O gráfico a seguir representa a quantidade de pessoas dentro do estabelecimento (y) em função da medida de intervalo de tempo (t), em minutos.

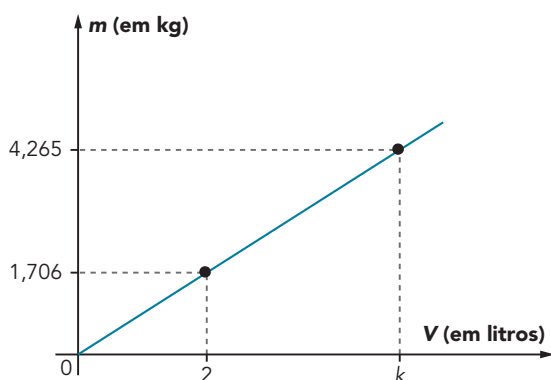


Quantas pessoas ainda estavam no interior do estabelecimento após 5 minutos de evacuação?

- a) 100 c) 80 e) 60
b) 90 d) 75

Alternativa d.

47. O gráfico a seguir mostra a relação entre a medida de massa e a medida de volume do óleo diesel.



- a) Determine a medida de densidade (isto é, a razão entre a medida de massa e a medida de volume) desse óleo, em quilogramas por litro. **0,853 kg/L**
b) Calcule o valor da abscissa k . **$k = 5$**
c) Escreva no caderno a lei da função que modela essa situação. **$y = 0,853x$**
d) Elabore outro problema que trate de massa, volume e densidade e que também seja modelado pelo gráfico de uma função. Depois troque com um colega e tente resolver o problema dele.

Resposta pessoal.

48. Você sabe o que é PIB? Trata-se da sigla de **Produto Interno Bruto** e representa a soma, em valores monetários, de todos os bens e serviços finais produzidos em determinada região, durante determinado período.

Segundo a Confederação da Agricultura e Pecuária do Brasil (CNA) e a Escola de Estudos Agrários da USP (Esalq), o agronegócio representou 21,4% do PIB nacional em 2019.

A tabela a seguir, fornecida pelo Ministério da Agricultura e Abastecimento, por meio da Secretaria de Política Agrícola, mostra a evolução dos preços de algumas **commodities** de 2017 para 2018.

Commodities

Produtos no estado bruto, que têm origem agropecuária ou de extração mineral ou vegetal, têm características físicas homogêneas e são produzidos em larga escala. Soja, boi, café e petróleo são exemplos de *commodities*.

Preço de produtos agrícolas

Produto	Unidade	2017	2018
Arroz	R\$/kg	0,98	0,87
Milho	R\$/kg	0,53	0,60
Trigo	R\$/kg	0,66	0,85

Fonte de consulta: BRASIL. Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. *Projeções do Agronegócio: Brasil 2018/19 a 2028/29 - projeções de longo prazo.*

Disponível em: <https://www.gov.br/agricultura/pt-br/assuntos/politica-agricola/todas-publicacoes-de-politica-agricola/projecoes-do-agronegocio/projecoes-do-agronegocio-2018-2019-2028-2029/view>.

Acesso em: 23 abr. 2020.

Supondo que a variação do preço do milho para 2019 seja igual à variação entre 2017 e 2018 e que essa variação permanecerá nos próximos anos, determine no caderno a lei da função que exprime esse comportamento e construa o gráfico dessa função. **A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.**

49. Uma torneira enche um tanque em 10 horas e uma outra em 12 horas. Com o tanque completamente vazio, as 2 torneiras são abertas. **b) O gráfico encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.**

- a) Calcule a fração do tanque que essas 2 torneiras, juntas, terão encheido ao final de cada uma das 5 primeiras horas. **$\frac{11}{60}, \frac{22}{60}, \frac{33}{60}, \frac{44}{60}, \frac{55}{60}$**
b) No caderno, mostre graficamente o que é pedido no item a e represente nesse gráfico a medida de intervalo de tempo em que o tanque ficará cheio.

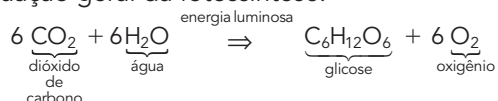
Leitura e compreensão

Fotossíntese

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

A luz proveniente do Sol que chega à Terra é a fonte primária de energia da biosfera terrestre. A energia associada a essa luz está, originalmente, na forma de energia luminosa. Parte dessa energia luminosa é convertida em energia química por meio da fotossíntese, que utiliza gás carbônico (CO_2) e água para produzir glicose: energia necessária para plantas e outros organismos fotossintéticos (também chamados de autótrofos), e para toda a cadeia alimentar que se estrutura a partir delas, na qual estamos incluídos.

Veja a seguir a equação geral da fotossíntese:

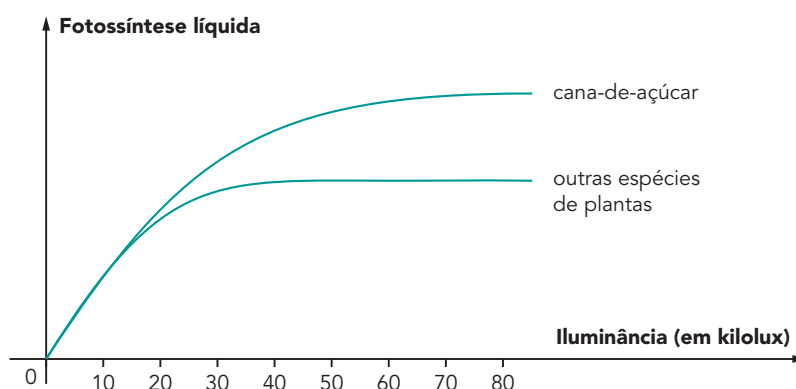


A molécula de glicose $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ armazena energia química.

Além da fotossíntese, muitos organismos fotossintéticos realizam a respiração, processo que usa glicose e oxigênio (O_2) e produz água e CO_2 . Nesse processo, a glicose sofre transformações que liberam a energia que será usada pela planta para diversas funções.

Em plantas de interesse comercial, como a cana-de-açúcar, pesquisadores realizam experimentos para quantificar a taxa fotossintética líquida, considerando fatores ambientais. Essa taxa inclui a fotossíntese bruta (FB) (o total de CO_2 incorporado pela planta) e a respiração (R), que reflete a quantidade de O_2 consumida pela planta. A partir disso, é possível calcular a fotossíntese líquida (FL), que pode ser expressa como $FL = FB - R$. Em resumo, se $FB > R$, a planta se desenvolve, e se $FB = R$ ou $FB < R$, toda a energia produzida pela planta é consumida na própria respiração e a planta não se desenvolve.

A fotossíntese líquida é influenciada pela espécie da planta e por fatores ambientais, como luminosidade, temperatura e concentração de CO_2 . Por exemplo, ao comparar a fotossíntese líquida da cana-de-açúcar com a de outras plantas expostas a níveis crescentes de iluminância, nota-se que a cana-de-açúcar apresenta elevada taxa fotossintética líquida à medida que aumenta a iluminância, enquanto outras plantas, para a mesma iluminância, têm taxa fotossintética inferior.



Fonte de consulta: PubliSBQ - Sociedade Brasileira de Química. *Fotossíntese*. Disponível em: <http://qnint.s bq.org.br/novo/index.php?hash=conceito.76>. Acesso em: 6 maio 2020.

Perceba que, para valores entre 0 kilolux e aproximadamente 10 kilolux, a fotossíntese líquida tem comportamento que pode ser aproximado ao de uma função afim.

Fique atento

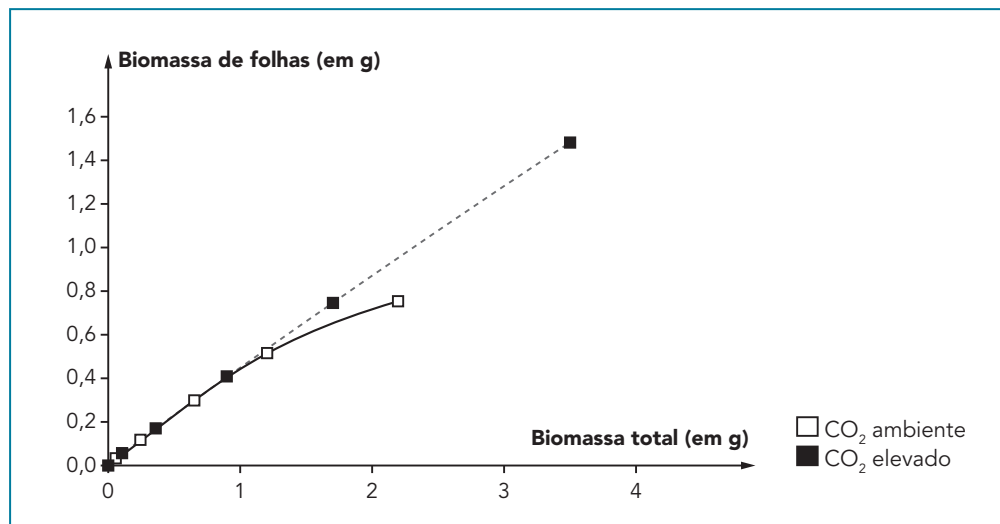
Iluminância é a grandeza física expressa em lux (lx) que está associada ao fluxo luminoso que incide sobre uma superfície situada a certa medida de distância da fonte luminosa.

Fique atento

Kilolux é a medida de iluminância equivalente a 10^3 lux.

Há na Botânica, além da relação apresentada, outras cujo comportamento pode ser aproximado ao de funções afins para alguns intervalos. É o caso da relação entre a **biomassa** presente em folhas de *Senna alata* (leguminosa arbórea) e a biomassa total quando em ambientes com CO_2 elevado.

Biomassa presente nas folhas em função da biomassa total das plantas de *Senna alata*



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Fonte de consulta: MARABESI, Mauro Alexandre. *Efeito do alto CO_2 no crescimento inicial e na fisiologia da fotossíntese em plântulas *Senna alata* (L.) Roxb.* 2007. Dissertação (Mestrado em Biodiversidade Vegetal e Meio Ambiente) – Instituto de Botânica da Secretaria de Estado do Meio Ambiente, São Paulo, 2007. Disponível em: http://arquivos.ambiente.sp.gov.br/pgibt/2013/09/Mauro_Alexandre_Marabesi_MS.pdf. Acesso em: 6 maio 2020.

A linha tracejada representa a função afim dada por $y = 0,42x + 0,027$, que é a função que melhor aproxima os dados relacionados à biomassa das folhas de *Senna alata* em ambiente de CO_2 elevado (concentração de 720 ppm). A linha contínua representa a função polinomial de 2º grau que melhor aproxima os dados relacionados ao CO_2 ambiente (concentração de 380 ppm).

O estudo dos experimentos que geraram os dados para a elaboração do gráfico acima aponta que plantas podem mitigar o efeito das elevadas liberações de CO_2 provocadas pela sociedade humana industrializada atual. As plantas incorporam CO_2 na forma de matéria orgânica enquanto crescem e, considerando esse estudo realizado para pesquisar o efeito do CO_2 sobre o crescimento e o desenvolvimento de plantas da espécie *Senna alata* constatou-se que, quando expostas a um ambiente de alta concentração de CO_2 , elas investiram mais em folhas e acumularam 60% mais de biomassa do que a amostra de plantas do tratamento de CO_2 ambiente. Com isso, conclui-se que a *Senna alata* é indicada no uso de sistemas florestais cujo objetivo é aumentar a captação de CO_2 da atmosfera (sequestro de carbono).

1. Pesquise e indique condições ambientais favoráveis ao crescimento de plantas.

Um exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

2. Pesquise sobre o papel do CO_2 na atmosfera e identifique:

Um exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

- problemas causados pela alta concentração de CO_2 na atmosfera;
- fatores que podem provocar altas concentrações de CO_2 na atmosfera;
- possíveis soluções para reduzir a concentração de CO_2 na atmosfera.

Em seguida, no caderno, elabore uma breve redação na qual você deve expressar os resultados de sua pesquisa, argumentando sobre as diversas influências que o CO_2 tem na natureza e na sociedade.

Um exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

3. Pesquise e indique pares de grandezas cuja relação entre as medidas pode ser aproximada de uma função afim. Um exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Biomassa

Massa seca de qualquer organismo vivo. No caso das plantas, indica a matéria orgânica que foi incorporada na planta a partir da fotossíntese.

Fique atento

Você vai estudar a função polinomial de 2º grau no próximo capítulo.

Além da sala de aula

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste tópico encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

A função afim e as flautas Rikbaktsa

A bacia do rio Juruema, situada no noroeste mato-grossense, abriga a comunidade indígena Rikbaktsa. *Rik* pode ser traduzido como “o ser humano”, *bak* é “verdadeiro” e *tsa* indica o plural, dessa maneira o nome Rikbaktsa significa “seres humanos verdadeiros”. Os habitantes dessa comunidade são habilidosos no uso das canoas e por isso são conhecidos na região como “canoeiros”.

A educação nas aldeias é organizada em escolas indígenas e os estudantes aprendem os conteúdos previstos no currículo nacional. Dos professores das escolas, os mais antigos foram educados no internato jesuítico de Utiariti, enquanto os mais novos foram educados pelos mais velhos até o nível de Educação Básica e depois tiveram formação profissional na Faculdade Indígena Intercultural do campus da Universidade Estadual de Mato Grosso (Unemat-MG).

No entanto, muitos professores e estudantes não se identificam com os conteúdos e contextos culturais utilizados na faculdade e nas escolas para o ensino de Matemática, já que esses retratam uma realidade distinta daquela que os Rikbaktsa conhecem. Esse fato tende a ser responsável por algumas dificuldades no ensino e na aprendizagem dos conteúdos de Matemática.

Rinaldo S. V. Arruda/Aervo do fotógrafo



Os Rikbaktsa reconhecem a importância de compreender as técnicas matemáticas que são trabalhadas nas escolas brasileiras, mas ressaltam que esse conteúdo precisa ter significado para os alunos indígenas.

Serge Pierre Guiraud/Aervo do fotógrafo



Índio Rikbaktsa tocando flauta. As flautas da comunidade são confeccionadas com bambu e os orifícios são feitos com flechas.

Usando a metodologia chamada etnomatemática, pesquisadores da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) fizeram a proposta de contextualizar o ensino da função afim, um dos conteúdos que aparece nos livros, a partir da construção das flautas usadas pelos Rikbaktsa no cotidiano, transformando assim, o estudo da função afim da Matemática no estudo da “função das flautas”.

Os Rikbaktsa produzem flautas que são utilizadas no cotidiano da comunidade. Essas flautas podem ser feitas de bambu, taquara ou ossos de aves, como o gavião real; e podem conter 3 ou 4 orifícios. A medida de comprimento das flautas varia conforme a medida de comprimento da mão do artesão responsável por fabricá-las.

Eles produzem alguns tipos diferentes de flauta, entre eles ressaltamos quatro tipos: Izowy, Tsapukte, Iharaiktsa e Izowytsik. Cada tipo de flauta também tem diferentes medidas de comprimento, e, dessa maneira, o som que emitem é distinto. Quanto maior a medida de comprimento da flauta, mais grave é o som emitido.

A tabela a seguir apresenta a medida de comprimento de cada tipo de flauta usando a unidade de medida padrão para os Rikbaktsa e as medidas correspondentes em centímetros.

Medida de comprimento das flautas Rikbaktsa

Tipo da flauta	Medida de comprimento na unidade de medida Rikbaktsa (palmos da mão)	Medida de comprimento aproximada (em centímetros)
Izowytsik	4	68
Iharaiktsa	4,5	76,5
Tsapukte	5	85
Izowy	5,5	93,5

Fonte de consulta: MATTOS, José Roberto Linhares de; POLEGATTI, Geraldo Aparecido. *Um encontro etnomatemático na educação escolar indígena: a função das flautas dos Rikbaktsa*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1388_280_ID.pdf. Acesso em: 12 maio 2020.

Assim como fizeram os estudantes indígenas Rikbaktsa, vamos analisar a relação da função afim com as medidas de comprimento das flautas.

1. Considerando x a medida de comprimento da flauta em palmos e $f(x)$ a medida de comprimento da flauta em centímetros, como poderíamos escrever a lei $f(x) = ax + b$ utilizando os dados dispostos na tabela?
 $f(x) = 17x$
2. Represente no caderno o gráfico dessa função.
O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
3. O que representa, na prática, o coeficiente a dessa função?
A medida de comprimento aproximada do palmo do artesão, em centímetros.
4. Junte-se a um colega e respondam: Qual é a importância de utilizar um contexto familiar ao conhecer um conceito matemático novo? *Resposta pessoal.*
5. Pense como os professores Rikbaktsa e procure na sua comunidade contextos que podem ser modelados por uma função afim. Descreva a situação e, se for possível coletar dados, modele a função.

Resposta pessoal.

Sobre o assunto

Para conhecer mais sobre como alguns povos indígenas utilizam a Matemática, sugerimos o site Povos indígenas no Brasil, disponível em: <https://pib.socioambiental.org/pt/Povo:Rikbaktsa%C3%A1>. Acesso em: 12 maio 2020.

Para conhecer mais sobre os Rikbaktsa, sugerimos a leitura do artigo “Um encontro etnomatemático na educação escolar indígena: a função das flautas dos Rikbaktsa”, de José Roberto Linhares de Mattos e Geraldo Aparecido Polegatti, disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1388_280_ID.pdf. Acesso em: 12 maio 2020.

Função linear e proporcionalidade

Como observamos, uma função linear é uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$ para todo a real diferente de 0. O gráfico dela no plano cartesiano é uma reta não vertical (é uma função) e não horizontal ($a \neq 0$) que passa pela origem $(0, 0)$. Os problemas que envolvem proporcionalidade, em geral, podem ser resolvidos por meio de uma função linear, por isso afirmamos que a função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Vamos supor que uma grandeza y seja função da grandeza x , ou seja, $y = f(x)$.

Dizemos que y é **diretamente proporcional** a x se as seguintes condições forem satisfeitas:

- y é uma função crescente de x ;
- se multiplicarmos x por um número natural n , o valor correspondente de y também ficará multiplicado por n , ou seja, $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo valor de x do domínio da função e todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Nessas condições, as grandezas y e x podem ser relacionadas por uma função linear f , tal que $y = f(x) = ax$, com a sendo um número real positivo. O coeficiente a é chamado **coeficiente de proporcionalidade**.

O gráfico dessa função no plano cartesiano é então uma semirreta com origem no ponto $(0, 0)$ do plano, como mostra a imagem ao lado.

Veja alguns exemplos de situações que envolvem proporcionalidade.

- a) Se 1 quilograma de feijão custa R\$ 6,00, então x quilogramas custam $y = f(x) = 6x$. Note que $f(x) = 6x$ é a lei de uma função crescente ($x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$). E também que 1 kg custa R\$ 6,00, 2 kg custam R\$ 12,00, 3 kg custam R\$ 18,00, e assim por diante.

Duplicando a quantidade de quilogramas, duplicamos o preço; triplicando a quantidade de quilogramas, triplicamos o preço; etc. ou seja, o preço a pagar é diretamente proporcional à quantidade de quilogramas que compramos.

Nesse caso, o coeficiente de proporcionalidade é 6: $\frac{6}{1}, \frac{12}{2}, \frac{18}{3}$, etc.

Observe também que, nesse caso, $f(1) = 6$; $f(2) = 12$; $f(3) = 18$; $f(4) = 24$, etc. e que, por exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = f(3 \cdot 1) \\ 3 \cdot f(1) = 3 \cdot 6 = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow f(3 \cdot 1) = 3 \cdot f(1)$$

O gráfico de f no plano cartesiano está representado ao lado.

- b) Um motorista mantém o carro em uma rodovia a uma medida de velocidade constante de 90 km/h no piloto automático. Veja na tabela alguns valores dessa situação.

Deslocamento de um veículo

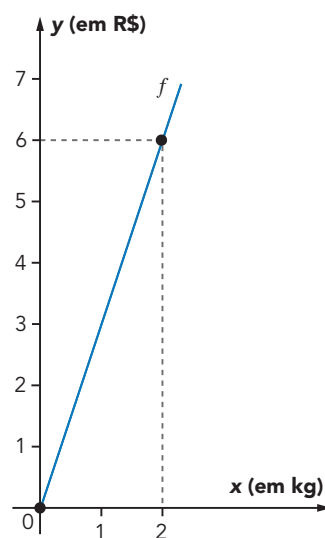
t (em horas)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	t
d (em km)	30	45	90	180	$d = 90t$

Tabela elaborada para fins didáticos.

O modelo matemático dessa situação é a função linear dada por $d = 90t$. Note que a função dada por $d = 90t$ é crescente e que, duplicando a medida de intervalo de tempo, duplica a medida de distância; triplicando a medida de intervalo de tempo, triplica a medida de distância; e assim sucessivamente, ou seja, a medida de distância percorrida é diretamente proporcional à medida de intervalo de tempo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

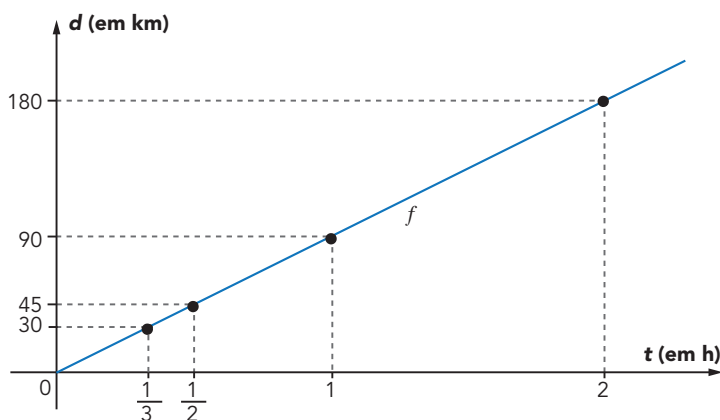


Banco de imagens/Arquivo da editora

O gráfico dessa função, no plano cartesiano, está representado ao lado. Nesse caso, o coeficiente de proporcionalidade é 90.

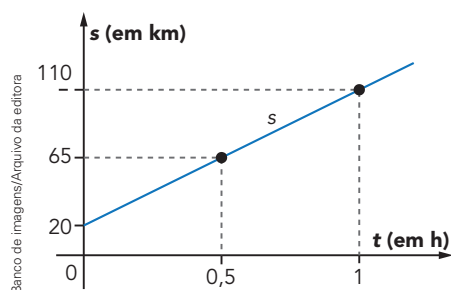
Observe que: $d(2) = d(2 \cdot 1) = 2 \cdot d(1)$

$\downarrow$ 180 $\downarrow$ 90



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Note que, se esse veículo estivesse na posição 20 km no início do percurso, a equação horária da posição seria dada por $s(t) = 90t + 20$, e o gráfico dessa função seria este abaixo.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Apesar de a representação gráfica da função s ser uma semirreta, ela não passa na origem do plano cartesiano e s e t não são grandezas diretamente proporcionais. De fato, ao passarmos de $t = 0,5$ h para $t = 1$ h, a posição s não dobra, pois vai de $s = 65$ km para $s = 110$ km.

Atividades resolvidas

6. Ao ser aplicada uma quantia x em uma caderneta de poupança a uma taxa de juros compostos mensal, após 1 mês é obtido um montante y . Nesse cenário, uma aplicação de R\$ 1.000,00 que rende 0,7% ao mês resulta em um montante de R\$ 1.007,00 no fim do primeiro mês.

- Escreva a lei da função que relaciona x e y e verifique se essas grandezas são diretamente proporcionais.
- Verifique se a relação entre os juros que se recebe pela quantia aplicada inicialmente (x) e a medida de intervalo de tempo (t) é uma proporcionalidade.

Resolução

a) Para obter os juros (j) de um capital inicial (x) ao final de 1 mês precisamos multiplicar a taxa (i) pelo capital inicial (x). Sabemos que a taxa é igual a $0,7\% = 0,007$, assim, temos: $j = x \cdot 0,007 \Rightarrow j = 0,007x$.

Para calcular o montante (y), é preciso somar os juros (j) ao capital inicial (x):

$$y = j + x \Rightarrow y = 0,007x + x \Rightarrow y = 1,007x$$

Considerando os dados fornecidos, podemos construir a tabela ao lado.

A segunda linha da tabela pode ser obtida calculando o rendimento dos juros considerando o capital inicial (x) igual a R\$ 2.000,00.

$$j = x \cdot i \Rightarrow j = 2000 \cdot 0,007 \Rightarrow j = 14$$

$$y = 0,007x \Rightarrow y = 0,007 \cdot 2000 \Rightarrow y = 2014$$

Observe que a segunda linha da tabela também pode ser obtida multiplicando a primeira linha por 2. Assim, podemos notar que as 2 condições da proporcionalidade estão satisfeitas:

- quanto maior a quantia investida, maior será o montante (função crescente);
 - ao ser dobrada (triplicada, quadruplicada, ...) a quantia x , o montante será duplicado (triplicado, quadruplicado, ...).
- Portanto, a função é dada pela lei $y = 0,007x$ e as grandezas x e y são diretamente proporcionais.

Rendimento das aplicações em um mês

Capital inicial (x)	Juros (j)	Montante (y)
R\$ 1.000,00	R\$ 7,00	R\$ 1.007,00
R\$ 2.000,00	R\$ 14,00	R\$ 2.014,00

Tabela elaborada para fins didáticos.

- b) Já sabemos que, ao aplicar a quantia inicial R\$ 1.000,00, os juros ao final do primeiro mês são de R\$ 7,00 e o montante é R\$ 1.007,00.

Para calcular os juros do segundo mês, precisamos utilizar o montante do primeiro mês como capital inicial. Temos: $j = x \cdot i \Rightarrow j = 1007 \cdot 0,007 \Rightarrow j = 7,049$.

Dessa maneira, o montante será: $y = j + x \Rightarrow y = 1007 + 7,049 \approx 1014,05$.

Utilizando esses dados, podemos montar a tabela a seguir.

Rendimento de uma aplicação em 2 meses

Medida de intervalo de tempo (em meses)	Capital inicial (x)	Juros (j)	Montante (y)
1	R\$ 1.000,00	R\$ 7,00	R\$ 1.007,00
2	R\$ 1.007,00	R\$ 7,049	R\$ 1.014,05

Tabela elaborada para fins didáticos.

Quando se dobra a medida de intervalo de tempo de investimento, não se dobram os juros, pois a cada mês aplica-se uma quantia maior.

Portanto, os juros (j) recebidos ao se aplicar um capital inicial (x) nessa caderneta de poupança não são proporcionais à medida de intervalo de medida de tempo da aplicação.

7. Um pesquisador fez um mapa utilizando uma escala escolhida por ele de algumas cidades. A tabela a seguir apresenta a medida de distância real, em quilômetros, e a medida de distância no mapa, em centímetros, entre algumas cidades.

Medida de distância entre algumas cidades

x: medida de distância real (em km)	5	7,5	12,5
y: medida de distância no mapa (em cm)	2	3	5

Tabela elaborada para fins didáticos.

- a) Construa no caderno o gráfico da função que relaciona y em função de x e escreva a lei da função.
- b) Considere 2 cidades que têm medida de distância de 9 km uma da outra. Qual é a medida de distância entre elas no mapa?
- c) Qual é a escala desse mapa?

Resolução

- a) Representando os valores da tabela no plano cartesiano e traçando o gráfico, vemos que ele representa uma função linear.

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{7,5 - 5} = \frac{1}{2,5} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

De acordo com o gráfico, $b = 0$.

Logo, podemos escrever a lei da função que é do tipo $y = ax + b$:

$$y = \frac{2}{5}x + 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x$$

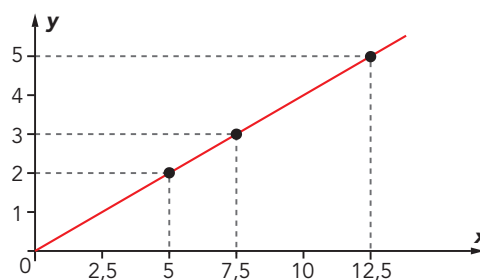
- b) Para $x = 9$, temos $y = \frac{2}{5} \cdot 9 = \frac{18}{5} = 3,6$.

Portanto, a medida de distância no mapa é 3,6 cm.

- c) Determinar a escala do mapa significa descobrir a medida de distância real x que corresponde a uma medida de distância $y = 1$ cm no mapa. Então: $1 = \frac{2}{5}x \Rightarrow 5 = 2x \Rightarrow x = 2,5$

Sabemos que $2,5 \text{ km} = 2\,500 \text{ m} = 250\,000 \text{ cm}$.

Portanto, a escala desse mapa é 1: 250 000.



Banco de imagens/Arquivo da editora

50. d) Não. Pois, por exemplo, o lucro na venda de 10 livros é de R\$ 300,00 ($L(10) = 300$), mas, dobrando o número de livros vendidos, obtém-se um lucro de R\$ 800,00 ($L(20) = 800$), que não é o dobro de R\$ 300,00.

Atividades

Não escreva no livro.

50. O preço de venda de um livro é de R\$ 50,00 por unidade. A receita total $f(x)$ obtida com a venda desse livro pode ser calculada em função do número x de livros vendidos.

- a) Escreva no caderno a lei dessa função. $f(x) = 50x$
- b) Essa função é linear? **Sim.**
- c) A receita total é diretamente proporcional ao número de livros vendidos? **Sim.**
- d) Suponha que, nessa situação, o lucro, em reais, pela venda de x livros seja dado por $L(x) = 50x - 200$. O lucro é diretamente proporcional ao número de livros vendidos? Justifique.

51. No caderno, construa a representação gráfica da função que relaciona o montante final depois de 1 mês ao capital inicial, considerando uma aplicação com uma taxa de juros mensal de 0,5% e um capital inicial variando de R\$ 0,00 a R\$ 10.000,00.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

52. O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), iniciativa do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), é um índice usado para medir a qualidade da educação no país.

De maneira simplificada, podemos dizer que o Ideb de uma unidade escolar para certa etapa de ensino é estabelecido de acordo com 2 subíndices.

- N : Média de proficiência nas disciplinas de Língua Portuguesa e de Matemática da etapa de ensino na unidade escolar, em determinados exames nacionais, padronizada de 0 a 10.
- P : Subíndice baseado na taxa de aprovação dos estudantes na etapa escolar, padronizado de 0 a 1. Com esses 2 dados, o Ideb é calculado pela seguinte expressão:

$$I = N \cdot P$$

Perceba que, desse modo, o Ideb varia de 0 a 10 e que, quanto maior o Ideb, melhor é considerada a qualidade da educação na unidade escolar para a etapa de ensino.

Fonte de consulta: Nota técnica - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/o_que_e_o_ideb/Nota_Tecnica_n1_concepcaoIDEB.pdf. Acesso em: 12 maio 2020.

Considerando as informações, responda a cada item no caderno.

- a) Qual é o domínio dos valores possíveis do Ideb?
O domínio é o intervalo $[0, 10]$.
 - b) Mantendo P constante, a relação entre o Ideb de uma unidade escolar e a média N das notas é diretamente proporcional? **Sim.**
 - c) Suponha que, em uma unidade escolar, na etapa do Ensino Médio, a média de proficiência nas disciplinas de Língua Portuguesa e de Matemática seja igual a 6,5, e que 55% dos estudantes foram aprovados ao final do ano letivo nessa etapa. De acordo com esses dados, qual é o Ideb dessa escola para o Ensino Médio? **3,575**
 - d) Em 2020, a meta para o Ideb nacional é 6,0. Se a unidade escolar indicada aumentar em 1,0 o índice N e mantiver constante a taxa de aprovação, ela alcançará a meta nacional de 6,0? Caso negativo, qual deveria ser o aumento no subíndice N (mantendo a taxa de aprovação constante) para que a unidade escolar alcance a meta? **Não. É impossível a escola alcançar a meta mantendo a taxa de aprovação em 55%.**
 - e) Junto a um colega, respondam: Na opinião de vocês, por que não seria ideal que o Ideb de uma unidade escolar fosse dado apenas pelo subíndice N ou apenas pelo subíndice P ? **Um exemplo de resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.**
53. Elabore um problema sobre compra e venda de um produto cuja resolução necessite do uso de uma função afim. **53. Resposta pessoal.**

Zero da função afim

O valor de x para o qual a função afim dada pela lei $f(x) = ax + b$ se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, denomina-se **zero da função afim**. Para determinar o zero de uma função afim basta encontrar o valor real de x que satisfaz a equação $ax + b = 0$.

Veja alguns exemplos.

- a) O zero da função afim f definida por $f(x) = 2x + 5$ é $x = -\frac{5}{2}$, pois $-\frac{5}{2}$ é raiz da equação $2x + 5 = 0$.
- b) O zero da função afim f definida por $f(x) = 2x - 4$ é $x = 2$, pois 2 é raiz da equação $2x - 4 = 0$.
- c) O zero da função afim f definida por $f(x) = x - 8$ é $x = 8$, pois 8 é raiz da equação $x - 8 = 0$.

Fique atento

O zero de uma função f qualquer é raiz da equação obtida ao fazer $f(x) = 0$.

Refleta

Confira o valor do zero de cada função afim dos exemplos **b** e **c**.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

- d) Qualquer número real r é raiz da função constante nula f definida por $f(x) = 0$, pois a equação $f(r) = 0$ é sempre verdadeira, independentemente do valor de r .
- e) A função constante não nula f definida por $f(x) = -5$ não tem zero, pois não há número real r tal que $f(r) = 0$.

Não escreva no livro.

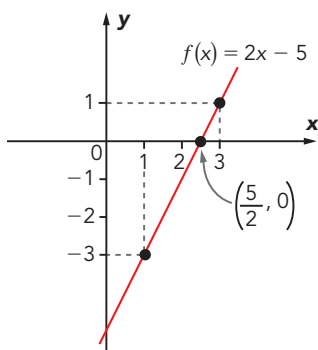
Interpretação geométrica

Geometricamente, o zero da função afim dada por $f(x) = ax + b$ é a **abscissa** do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x .

Por exemplo, dada a função afim definida por $f(x) = 2x - 5$, temos:

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (zero da função)}$$

x	y
1	-3
3	1



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Logo, a reta, isto é, o gráfico dessa função, intersecta o eixo x no ponto $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Estudo do sinal da função afim

Análise a situação a seguir.

Um vendedor de maçãs tem um gasto fixo mensal de R\$ 300,00. Como cada maçã será vendida a R\$ 2,00, ele deseja saber quantas maçãs devem ser vendidas para que haja lucro no final do mês.

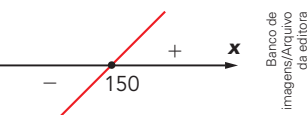
Observe que o lucro é dado em função do número x de maçãs vendidas, e a lei da função é $f(x) = 2x - 300$. Para resolver a questão do comerciante, devemos determinar os valores reais de x tais que $f(x) > 0$, ou seja, resolver $2x - 300 > 0$.

Estudando o sinal: $\underbrace{2x - 300}_{f(x)} > 0$

Como $a = 2$ ($a > 0$), então a função é crescente.

$$2x - 300 = 0 \Rightarrow 2x = 300 \Rightarrow x = 150 \text{ (zero da função)}$$

Dispositivo prático:



Banco de Imagens/Arquivo da editora

- $x > 150 \Rightarrow f(x) > 0$ (haverá lucro)
- $x = 150 \Rightarrow f(x) = 0$ (não haverá lucro nem prejuízo)
- $x < 150 \Rightarrow f(x) < 0$ (haverá prejuízo)

Sendo S o conjunto solução, temos: $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 150\}$.

Refleta

- O que acontece com o valor de $f(x)$ quando $x > \frac{5}{2}$?
E quando $x < \frac{5}{2}$?
- Qual é a intersecção do gráfico da função constante nula com o eixo x ? E qual é a intersecção do gráfico da função constante não nula com esse eixo? Como isso se relaciona com os zeros (se existirem) dessas funções?

- $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.
- A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Refleta

O dispositivo prático mostra um esboço do gráfico da função f e da intersecção dele com o eixo x do plano cartesiano. Qual é o significado dos sinais $+$ e $-$ nesse dispositivo?

O sinal $+$ significa $f(x) > 0$, e o sinal $-$ significa $f(x) < 0$.

Outro modo é resolvendo a inequação $2x - 300 > 0$. Inequações são sentenças matemáticas que expressam uma desigualdade e apresentam pelo menos uma incógnita. O conjunto solução de uma inequação é o conjunto de valores que, quando atribuídos à incógnita, tornam a desigualdade verdadeira. Veja como resolver essa inequação:

$$\begin{aligned} 2x - 300 &> 0 \text{ em } \mathbb{N} \\ 2x > 300 &\Rightarrow x > 150 \\ S &= \{x \in \mathbb{N} \mid x > 150\} \end{aligned}$$

Assim, o comerciante deve vender mais de 150 maçãs para que tenha lucro no fim da venda.

Fique atento

Em uma inequação, podemos adicionar ou subtrair um mesmo número de ambos os membros e o sinal da desigualdade se mantém. O mesmo ocorre ao multiplicar ou dividir ambos os membros por um número positivo; mas, se multiplicarmos ou dividirmos por um número negativo, devemos trocar o sinal de desigualdade (se for " $<$ ", troca-se por " $>$ ", se for " $>$ ", troca-se por " $<$ "; o mesmo vale para " $\leq$ " e " $\geq$ ").

Por exemplo, veja a seguir uma resolução da inequação $-5x + 10 < 7$:

$$-5x + 10 < 7 \Rightarrow -5x + 10 + (-10) < 7 + (-10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x < -3 \Rightarrow -5x \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) > -3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow x > \frac{3}{5}$$

Portanto, o conjunto solução dessa inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{5}\right\}$.

Refleta

Por que o conjunto solução S dessa inequação é um subconjunto de $\mathbb{N}$, e não de $\mathbb{R}$?

Porque a inequação trata de número de maçãs que, necessariamente, deve ser um número natural.

Atividades resolvidas

8. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $-\frac{2x}{3} + \frac{4(12-x)}{9} > 10$.

Resolução

1º modo:

$$-\frac{2x}{3} + \frac{4(12-x)}{9} > 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2x}{3} + \frac{4(12-x)}{9} - 10 > 0$$

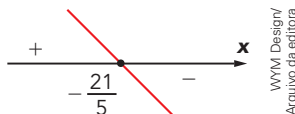
Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$f(x) = -\frac{2x}{3} + \frac{4(12-x)}{9} - 10$. Então, o conjunto solução da inequação dada é igual ao conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$. Desenvolvendo a lei de f , temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{2x}{3} + \frac{4(12-x)}{9} - 10 = \\ &= -\frac{6x}{9} + \frac{48}{9} - \frac{4x}{9} - \frac{90}{9} = -\frac{10x}{9} - \frac{42}{9} \end{aligned}$$

Logo, f é uma função afim decrescente (pois $a = -\frac{10}{9} < 0$) e $f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{10x}{9} - \frac{42}{9} = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = -\frac{21}{5}$.

Dispositivo prático:



Portanto, $f(x) > 0 \Rightarrow x < -\frac{21}{5}$ e, por isso, o conjunto solução da inequação $-\frac{2x}{3} + \frac{4(12-x)}{9} > 10$ é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{21}{5}\right\}.$$

2º modo:

$$-\frac{2x}{3} + \frac{4(12-x)}{9} > 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{2x}{3} + \frac{4(12-x)}{9}\right) \cdot (9) > (10) \cdot (9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \cdot 2x + 4(12-x) > 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x + 48 - 4x > 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-6x + 48 - 4x) - (48) > (90) - (48) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10x > 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-10x) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) < (42) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < -\frac{42}{10} \Rightarrow x < -\frac{21}{5}$$

O conjunto solução dessa inequação é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{21}{5}\right\}.$$

9. Na fabricação de uma peça de carro, um pequeno fabricante tem um custo fixo mensal de R\$ 13.000,00 de manutenção do maquinário, mas um custo de R\$ 250,00 por peça fabricada. Além disso, cada peça tem um preço de venda de R\$ 900,00. Qual é a quantidade mínima de peças que ele deve vender

mensalmente para conseguir um lucro maior do que ou igual a R\$ 26.000 no mês?

Resolução

Pelo enunciado, na produção de x peças, o fabricante tem custo mensal, em reais, $C(x) = 250x + 13000$, e receita mensal, em reais, $R(x) = 900x$. Logo, o lucro mensal, em reais, é dado por:

$$L(x) = R(x) - C(x) = (900x) - (250x + 13000) = 650x - 13000$$

Para que o lucro seja maior do que ou igual a R\$ 26.000 no mês, devemos ter $L(x) \geq 26000$.

$$L(x) \geq 26000 \Rightarrow 650x - 13000 \geq 26000 \Rightarrow 650x - 39000 \geq 0$$

A função definida por $f(x) = 650x - 39000$ é crescente (pois $a = 650$) e tem como zero o número

$$x = \frac{39000}{650} = 60. \text{ Logo:}$$

$$L(x) \geq 26000 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow x \geq 60$$

Portanto, o fabricante deve vender, no mínimo, 60 peças no mês para conseguir um lucro mensal de, pelo menos, R\$ 26.000,00.

Atividades

Não escreva no livro.

54. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações usando o processo que julgar mais conveniente.

a) $3 - 4x > x - 7$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

b) $\frac{x}{4} - \frac{3(x-1)}{10} \leq 1$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -14\}$

55. Um comerciante teve uma despesa de R\$ 230,00 na compra de certa mercadoria. Como vai vender cada unidade dessa mercadoria por R\$ 5,00, o lucro final será dado em função das x unidades vendidas.

- a) Qual é a lei dessa função f ? $f(x) = 5x - 230$
b) Para quais valores de x temos $f(x) < 0$? Como x pode ser interpretado nesse caso? $x < 46$; o comerciante terá prejuízo se vender menos de 46 unidades.
c) Para qual valor de x haverá lucro de R\$ 315,00? $x = 109$
d) Para quais valores de x o lucro será maior do que R\$ 280,00? $x > 102$
e) Para quais valores de x o lucro estará entre R\$ 100,00 e R\$ 180,00? $66 < x < 82$

56. Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções. Em cada opção, paga-se um valor fixo (a taxa de inscrição) mais um valor por cada consulta, como é mostrado a seguir.

PLANO A		PLANO B	
Inscrição	R\$ 100,00	Inscrição	R\$ 180,00
Cada consulta	R\$ 50,00	Cada consulta	R\$ 40,00

WYD Design/Arquivo da editora

O gasto total de cada plano é dado em função da quantidade x de consultas. b) O plano A, o que significa que o custo aumenta mais rapidamente no plano A.

- a) a lei da função correspondente ao valor gasto em cada plano, em função de x ; Plano A: $f(x) = 50x + 100$; Plano B: $g(x) = 40x + 180$.
b) qual das funções têm maior taxa de variação e como isso poderia ser interpretado;
c) em que condições é possível afirmar que o plano A é mais econômico; o plano B é mais econômico; os dois planos são equivalentes. O plano A é mais econômico para $x < 8$; o B, para $x > 8$; e eles são equivalentes para $x = 8$.

57. (Unicamp-SP) Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo:

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R\$ 35,00	R\$ 0,50
B	R\$ 20,00	R\$ 0,80
C	0	R\$ 1,20

- a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês? O plano C.
b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso do que os outros dois? 50 minutos.
58. (UFC-CE) Uma cidade é servida por duas empresas de telefonia. A empresa X cobra, por mês, uma assinatura de R\$ 35,00 mais R\$ 0,50 por minuto utilizado. A empresa Y cobra, por mês, uma assinatura de R\$ 26,00 mais R\$ 0,65 por minuto utilizado. A partir de quantos minutos de utilização o plano da empresa X passa a ser mais vantajoso para os clientes do que o plano da empresa Y? 60 minutos.

59. (EEM-SP) Uma empresa produz trufas de chocolate cujo custo de fabricação pode ser dividido em duas partes: uma, independente da quantidade vendida, de R\$ 1.500,00 mensais; outra, dependente da quantidade fabricada, de R\$ 0,50 por unidade. Escreva a(s) expressão(ões) que permita(m) determinar o número de trufas que devem ser vendidas num mês para que a empresa não tenha prejuízo, sabendo-se que o preço de venda de cada unidade é de R\$ 1,50. $x \geq 1500$

60. (Vunesp) Duas pequenas fábricas de calçados, A e B, têm fabricado, respectivamente, 3000 e 1100 pares de sapatos por mês. Se, a partir de janeiro, a fábrica A aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica B aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a produção da fábrica B superará a produção de A a partir de: Alternativa d.

- a) março. c) julho. e) novembro.
b) maio. d) setembro.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Edifício sustentável inspirado em cupinzeiro

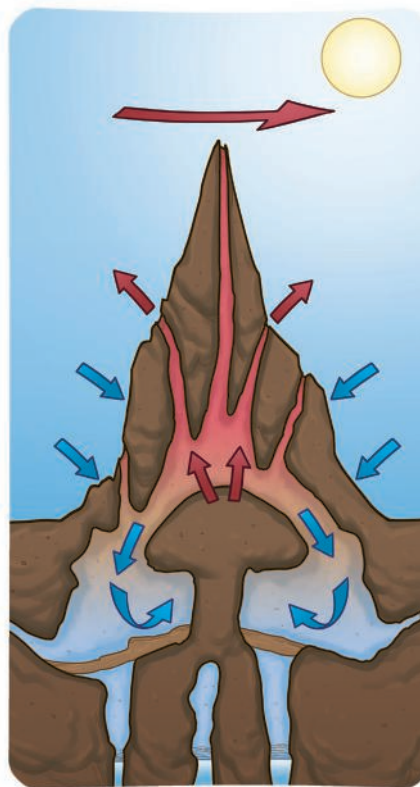
O Eastgate Centre, localizado em Harare, no Zimbábue, foi uma das edificações construídas com os princípios da biomimética – área da Ciência que estuda fenômenos e processos da natureza para inspirar projetos de inovação em várias áreas do conhecimento –, tendo como referência as estruturas dos imensos cupinzeiros africanos para manter a medida de temperatura interna agradável.

Os cupins são incríveis construtores: podem construir um cupinzeiro em pouquíssimo tempo e conseguem regular a medida de temperatura interna para cultivar fungos para a própria alimentação. Esses fungos devem ser mantidos a 30 °C e a medida de temperatura em Zimbábue pode variar de 1,6 °C durante a noite a 40 °C durante o dia. O segredo para a manutenção da medida de temperatura interna é a abertura de novos túneis e o fechamento de túneis antigos a fim de que o ar noturno entre e circule na parte inferior do monte, passe por galerias úmidas e suba para o topo até sair do cupinzeiro.



Joana Kruse/Alamy/Fotografia

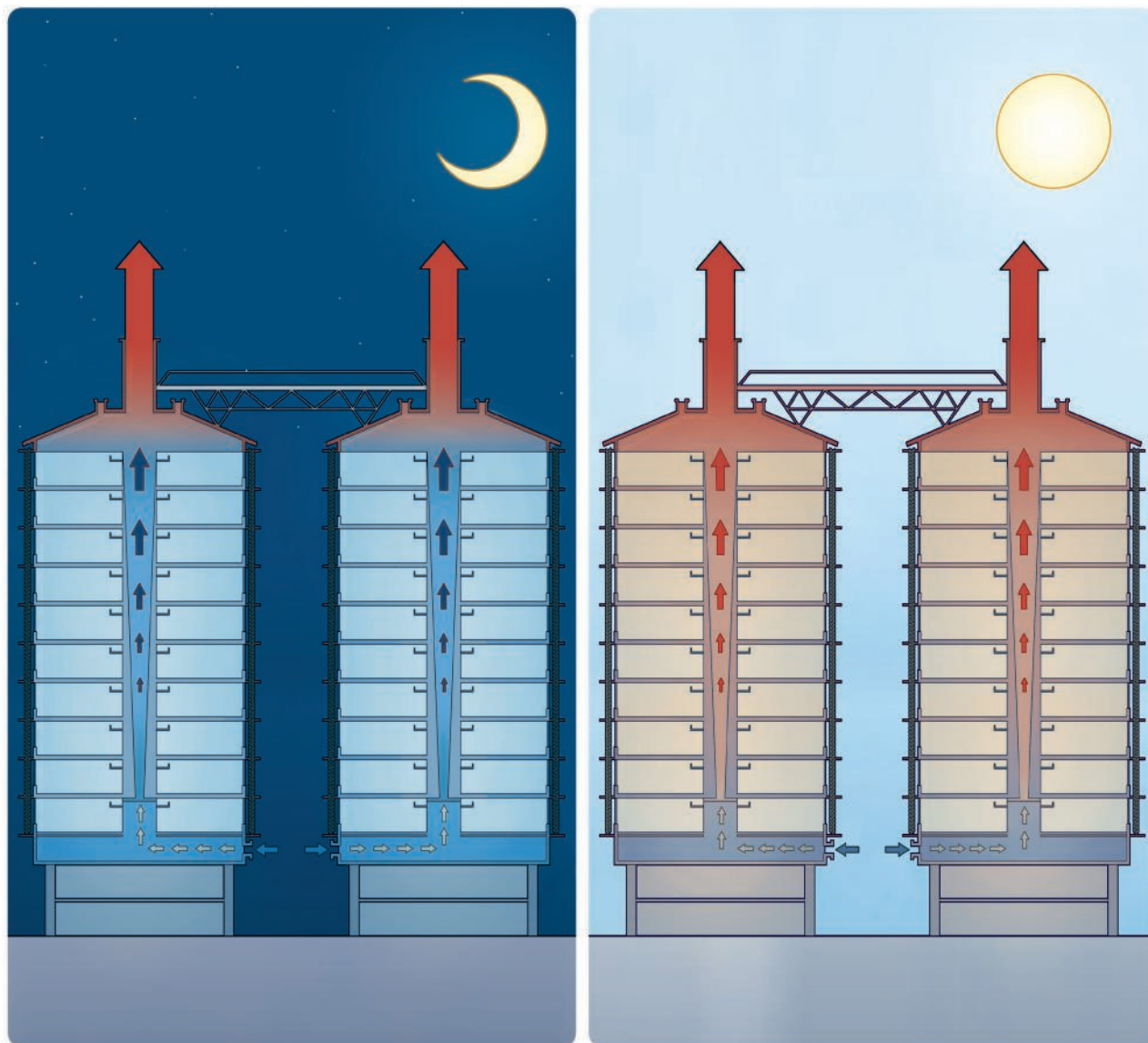
O cupinzeiro africano é formado pelos cupins da espécie *Macrotermes*. Essas construções podem ter medida de comprimento de altura de até 8 metros, comportando uma população de em média 2 milhões de cupins. Foto tirada na Namíbia, em 2018.



Tiago Donzete Lame/Arquivo da editora

Esquema mostrando a circulação de ar frio (em azul) e ar quente (em vermelho) dentro de um cupinzeiro.

Assim como o cupinzeiro, o edifício Eastgate, idealizado pelo arquiteto Mick Pearce, vale-se de túneis por onde entra o ar noturno, com medida de temperatura mais baixa, e, durante o dia, quando a medida de temperatura externa é mais elevada, circula por câmaras (no caso do edifício, salas comerciais). O ar aquecido é canalizado para as chaminés no topo do prédio, por onde é eliminado. As trocas de ar com o ambiente externo são reguladas e acontecem 10 vezes durante a noite e 2 vezes durante o dia.



No corte transversal do Eastgate Centre é possível ver a estrutura que permite as trocas de calor durante o dia e a noite.

A fim de absorver menos calor, a estrutura do prédio é feita de concreto, que tem calor específico $1,00 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, e com formatos curiosos, como se fossem dentes, que reduzem a incidência de luz nas pequenas janelas. São duas torres, lado a lado, e o vão entre elas permite a circulação do ar. Sob o piso das salas há uma área oca por onde circula o ar fresco. Quando o ar esquentar, é direcionado para dutos verticais que cuidam da exaustão pelas chaminés.

Fique atento

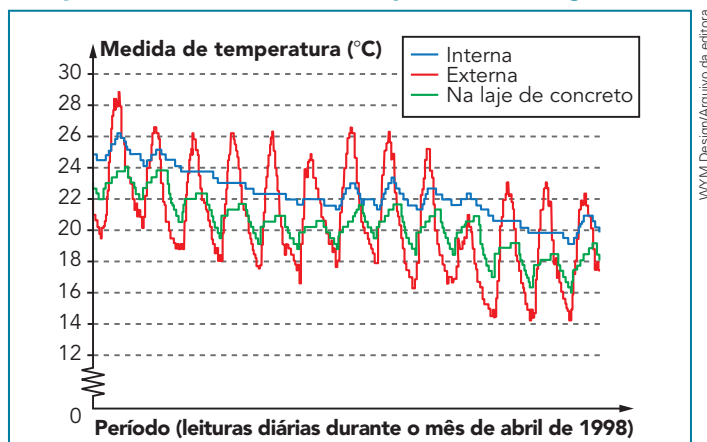
Calor específico é a quantidade de calor necessária para que 1 unidade de medida de massa de uma substância sofra uma variação de 1 unidade de medida de temperatura. Assim, para um material como o concreto, que tem calor específico de $1,00 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, é necessário 1 joule (1 J) de medida de calor para aumentar em 1 Kelvin (1 K) a medida de temperatura de 1 kg.

Quanto maior for o calor específico de uma substância, maior será a quantidade de calor necessária para que a medida de temperatura dela aumente, mantendo a medida de massa constante.

Normalmente em novembro, quando os dias e as noites são nublados, a medida de temperatura máxima dentro de um escritório não excede 26°C . Mas durante duas semanas do ano, em 1998, foi observado o pico de temperatura com medidas entre 27°C e 28°C , às 16 h. E a medida de temperatura inferior durante o ano todo não foi menor do que 19°C .

O gráfico a seguir mostra a variação diária das medidas de temperatura, durante alguns dias do mês de abril de 1998, dentro do edifício, na estrutura e fora dele.

Variação diária das medidas de temperatura no Eastgate Centre



WTM Design/Arquivo da editora

Fonte de consulta: EASTGATE. Disponível em: <http://www.mickpearce.com/Eastgate.html>. Acesso em: 13 abr. 2020.

Esse empreendimento sustentável tem custo de energia elétrica 35% menor do que o de um prédio convencional na mesma cidade, uma vez que não utiliza sistema de ar condicionado, mas apenas ventiladores de exaustão ligados em horários determinados para auxiliar na circulação do ar, como em um cupinzeiro.

Conecte com o texto

1. Para escolher os materiais que comporiam a estrutura do Eastgate Centre, o arquiteto Mick Pearce (1938-), nascido no Zimbábue, teve que estudar como se comportava a variação das medidas de temperatura deles. A capacidade térmica (C) de um objeto relaciona a variação da medida de temperatura (ΔT) com a quantidade de calor (ΔQ) recebida: $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$. Para uma mesma quantidade de

calor recebida, seria interessante para o edifício sustentável de Pearce optar por materiais com menor ou com maior capacidade térmica? *A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.*

2. A capacidade térmica (C) também relaciona a medida de massa (m) de uma substância e o calor específico (c) dessa mesma substância: $C = m \cdot c$. Considerando que um tijolo de cerâmica e um bloco de concreto tenham a mesma medida de massa e que o calor específico da cerâmica é de $0,92 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, qual seria o material mais interessante para o edifício sustentável de Pearce?

A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.

Pesquise e debata

3. Muitos instrumentos que utilizamos no cotidiano foram inspirados em algum animal ou planta. Pesquise invenções baseadas na biomimética e descreva no caderno como o comportamento na natureza influenciou o funcionamento delas. *Os exemplos de resposta encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.*
4. Alguns edifícios sustentáveis têm como grande aliada a inspiração na natureza. Pesquise outras edificações sustentáveis, baseadas ou não na biomimética. Escolha uma delas para avaliar a relação custo-benefício da geração e do consumo de energia elétrica. Depois, escreva um texto argumentando por que essas edificações são sustentáveis. *A resposta depende da pesquisa dos estudantes.*

Sobre o assunto

As construções sustentáveis podem receber certificação, como a BREEAM (que significa Método de Avaliação Ambiental do Building Research Establishment), que é a mais antiga e a mais utilizada em todo o mundo. Para conhecer mais sobre a BREEAM, você pode navegar na página do grupo BRE, disponível em: <https://www.bregroup.com/products/breem/>. Acesso em: 15 abr. 2020.



O edifício Eastgate Centre é um dos maiores edifícios comerciais de Harare, no Zimbábue. Ele foi construído na década de 1990 pelo arquiteto Mick Pearce. Foto de 2016.

amanderson2/flickr/
Creative Commons 2.0

Funções definidas por mais de uma sentença

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste tópico encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação 1

Não escreva no livro.

Imposto de renda

Os impostos são valores cobrados das pessoas ou das empresas, pelo governo, para que as instituições públicas funcionem e garantam à população educação, saúde, segurança, iluminação, infraestrutura, entre outros serviços.

Um dos impostos mais importantes no Brasil é o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF), também chamado de imposto de renda, que é recolhido pela Receita Federal. A parcela do imposto que uma pessoa deve pagar por ano é calculada de acordo com os rendimentos dela. Quanto maior o rendimento, maior é a parcela.

A porcentagem dos rendimentos a pagar ao governo é definida por faixas com alíquotas diferentes para cada uma delas. Por exemplo, quem tem rendimentos mensais de R\$ 2.000,00 tem a alíquota igual a 7,5%. Mas quem tem rendimentos mensais iguais a R\$ 3.000,00 tem a alíquota igual a 15%, e quem tem rendimentos mensais de R\$ 5.000,00 tem a alíquota igual a 27,5% (alíquotas do ano de 2020).

a) A relação entre os rendimentos mensais de uma pessoa e a alíquota é uma função afim? Justifique.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Você já tinha ouvido falar do IRPF? Pesquise a importância desse imposto.

Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Os recursos arrecadados com o imposto de renda são necessários para vários setores do país, como educação, segurança e saúde.

Dragana Gordic/Shutterstock



Todo ano algumas pessoas físicas precisam declarar, entre outras informações, os valores recebidos no ano anterior.

Situação 2

Conta de água

No Brasil, a tarifa a pagar pela água residencial é definida de acordo com o gasto de água: quanto maior for o gasto, maior é a tarifa a pagar. Isso geralmente ocorre de acordo com faixas de consumo.

Observe a tabela de faixa de consumo e tarifa de água residencial em Manaus (AM).

O cálculo da tarifa é feito considerando o consumo nas diferentes faixas. Por exemplo, veja como é calculada a tarifa para o consumo de 32 m³ de água.

- Primeiro, identifica-se que $32 \text{ m}^3 = 10 \text{ m}^3 + 10 \text{ m}^3 + 10 \text{ m}^3 + 2 \text{ m}^3$. Para cada um desses termos, paga-se uma tarifa diferente.
- Pelos primeiros 10 m³, pagam-se 3,9860 R\$/m³, o que resulta em R\$ 39,86, pois $10 \cdot 3,9860 = 39,86$.
- Pelos próximos 10 m³, pagam-se 7,7260 R\$/m³, o que resulta em R\$ 77,26, pois $10 \cdot 7,7260 = 77,26$.
- Pelos próximos 10 m³, pagam-se 11,7940 R\$/m³, o que resulta em R\$ 117,94, pois $10 \cdot 11,7940 = 117,94$.
- Pelos últimos 2 m³, pagam-se 16,0660 R\$/m³, o que resulta em R\$ 32,13, arredondados, pois $2 \cdot 16,0660 = 32,132$.

O total então é R\$ 39,86 + R\$ 77,26 + R\$ 117,94 + R\$ 32,13 = R\$ 267,19.

a) Qual é a tarifa que uma família paga se o gasto mensal for de 18 m³? R\$ 101,67

b) Escreva no caderno as leis de 2 funções: a que fornece a tarifa, em reais, para um consumo de água entre 0 e 10 m³, e a que fornece a tarifa, em reais, para um consumo de água entre 11 e 20 m³.

$t(c) = 3,9860 \cdot c$, para $0 \leq c \leq 10$; $t(c) = -37,40 + 7,7260 \cdot c$, para $11 \leq c \leq 20$.

Professor, é importante ressaltar aos estudantes que eles devem considerar apenas valores inteiros para o consumo.

Tarifa de consumo de água residencial em Manaus

Faixa de consumo (em m ³)	Tarifa de água (em R\$/m ³)
0 a 10	3,9860
11 a 20	7,7260
21 a 30	11,7940
31 a 40	16,0660
41 a 60	18,5370
Acima de 60	21,1360

Fonte de consulta: ÁGUAS DE MANAUS. Legislação e tarifas. Disponível em: <https://www.aguasdemanas.com.br/legislacao-e-tarifas/>. Acesso em: 29 maio 2020.

a) O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Os pontos são $(0; -8)$, $(1; -3)$, $(2; 2)$, $(3; 1,5)$, $(4; 1)$ e $(5; 0,5)$.

A função f não é uma função afim, pois os pontos representados no plano cartesiano não são colineares (isto é, não pertencem a uma mesma reta).

Explorando as funções definidas por mais de uma sentença

Existem algumas funções que são formadas por mais de uma sentença. Vamos explorar um pouco funções desse tipo.

Explore para descobrir

Não escreva no livro.

Para uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se:

- $f(0) = -8$; • $f(1) = -3$; • $f(2) = 2$; • $f(3) = 1,5$; • $f(4) = 1$; • $f(5) = 0,5$.

a) No caderno, identifique os pontos da forma $(x, f(x))$, para $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, represente-os em um plano cartesiano e responda: f é uma função afim? Justifique.

b) Seja $g:]-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $g(x) = f(x)$, para $x \in D(g)$. A partir dessas informações e das informações do enunciado, responda e justifique: g **poderia ser** uma função afim?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

c) Sabendo que g é, de fato, uma função afim, construa no mesmo plano cartesiano do item a o gráfico de g e indique a lei de g . O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

d) Seja $h: [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $h(x) = f(x)$, para $x \in D(h)$. A partir dessas informações e das informações do enunciado, responda e justifique: h **poderia ser** uma função afim?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

e) Sabendo que h é, de fato, uma função afim, construa no mesmo plano cartesiano do item c o gráfico de h e indique a lei de h . O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

f) Então, podemos estabelecer que:

- $g(x) = f(x)$, para $x \in D(g) =]-\infty, 2]$; • $h(x) = f(x)$, para $x \in D(h) = [2, \infty[$; • $D(f) = \mathbb{R}$.

Como podemos interpretar a união dos gráficos de g e h ? E como podemos expressar $f(x)$? Podemos interpretar a união dos gráficos de g e h como o gráfico de f . $f(x)$ pode ser expressa como sendo igual a $g(x)$, se $x \leq 2$, e igual a $h(x)$, se $x \geq 2$.

Figure atento

O símbolo ∞ pode ser utilizado para denotar intervalos, observe alguns exemplos a seguir.

- A notação $] -\infty, 2]$ corresponde a $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$, que representa o intervalo dos números reais menores do que ou iguais a 2.
- A notação $] -\infty, 2[$ corresponde a $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, que representa o intervalo dos números reais menores do que 2.
- A notação $[2, +\infty[$ corresponde a $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$, que representa o intervalo dos números reais maiores do que ou iguais a 2.
- A notação $[2, +\infty[$ corresponde a $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, que representa o intervalo dos números reais maiores do que 2.

No *Explore para descobrir* acima, foi trabalhada a função f , que, como você concluiu nos itens a a f, não é uma função afim, mas pode ser expressa usando as leis de duas funções g e h . A lei dessa função f pode ser

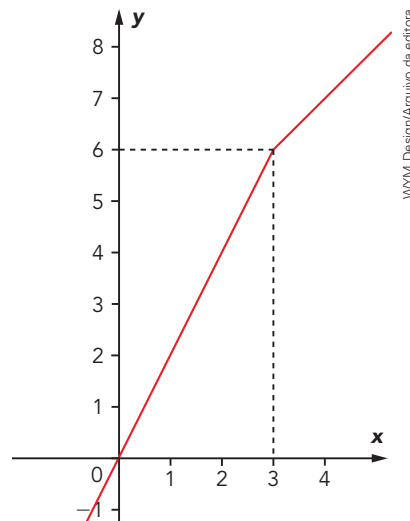
expressa da seguinte maneira:
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \leq 2 \\ h(x), & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Funções como essa são chamadas **funções definidas por mais de uma sentença**. Em funções desse tipo, a lei da função depende do valor de x , como ocorre no caso de f , em que $f(x)$ é dada por uma lei, se $x \leq 2$, e é dada por outra lei, se $x \geq 2$.

Observe ao lado a representação gráfica de outro exemplo de função definida por mais de uma sentença.

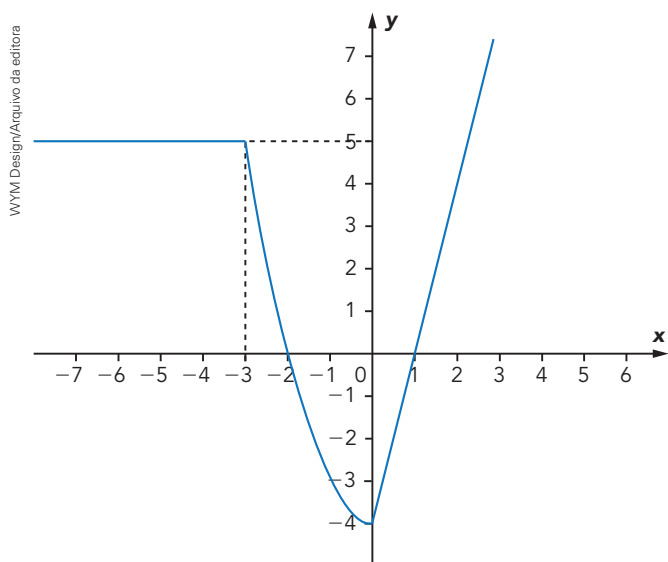
Essa função é dada pela lei:
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x < 3 \\ x + 3, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Observe que, nesse caso, cada um dos dois trechos da representação gráfica dessa função coincide com parte da representação gráfica de uma função afim, por isso essa função também é chamada **função afim por partes**.



WWM Design/Arquivo da editora

Contudo, existem funções definidas por mais de uma sentença cujas partes da representação gráfica não coincidem apenas com funções afim. Veja um exemplo a seguir.



A lei dessa função é:

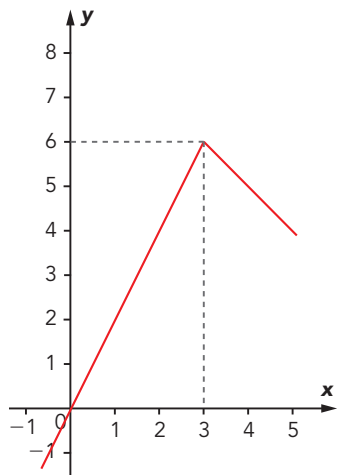
$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{se } x < -3 \\ x^2 - 4, & \text{se } -3 \leq x \leq 0 \\ 4x - 4, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Perceba que:

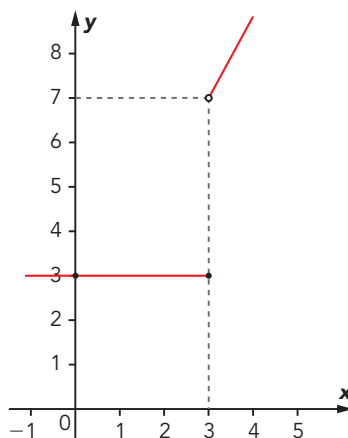
- para $x < -3$, o gráfico de f coincide com parte da representação gráfica de uma função constante não nula definida pela lei $g(x) = 5$;
- para $-3 \leq x \leq 0$, a representação gráfica de f coincide com parte da representação gráfica de uma função definida por $h(x) = x^2 - 4$, que é uma função polinomial de 2ª grau;
- para $x > 0$, a representação gráfica de f coincide com parte da representação gráfica de uma função polinomial de 1ª grau definida pela lei $i(x) = 4x - 4$.

Vejamos mais alguns exemplos de funções definidas por mais de uma sentença.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x < 3 \\ -x + 9, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x > 3 \\ 3, & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$



Fique atento

Lembre-se de que, para toda função afim do tipo $f(x) = ax + b$, com a e $b \in \mathbb{R}$, temos:

- para $a > 0$, a função é crescente;
- para $a < 0$, a função é decrescente;
- para $a = 0$, a função é constante.

Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

10. Considere a tabela de tarifa de consumo de água residencial em Manaus, apresentada na situação 2 da página 57.

Tarifa de consumo de água residencial em Manaus

Faixa de consumo (em m³)	Tarifa de água (em R\$/m³)
0 a 10	3,9860
11 a 20	7,7260
21 a 30	11,7940
31 a 40	16,0660
41 a 60	18,5370
Acima de 60	21,1360

Fonte de consulta: ÁGUAS DE MANAUS. *Legislação e tarifas*. Disponível em: <https://www.aguasdemanaus.com.br/legislacao-e-tarifas/>. Acesso em: 29 maio 2020.

No caderno, escreva a lei da função t que relaciona o consumo de água c , em m³, em uma residência em Manaus com o valor cobrado por esse consumo, em reais.

Resolução

Devido ao modo como o valor cobrado é pago dependendo da faixa de consumo, a função t deve ser expressa por mais de uma sentença.

- Se $0 \leq c \leq 10$, o valor cobrado é de $3,986c$.
- Se $11 \leq c \leq 20$, o valor cobrado pelos primeiros 10 m³ de água é de $10 \cdot 3,9860 = 39,86$, e o valor restante, correspondente ao consumo restante de $c - 10$, é de $(c - 10)7,7260 = 7,726c - 77,26$, totalizando $(39,86) + (7,726c - 77,26) = 7,726c - 37,4$.

- Se $21 \leq c \leq 30$, o valor cobrado pelos primeiros 20 m³ de água, conforme a expressão do item anterior, é de $7,726 \cdot 20 - 37,4 = 117,12$, e o valor restante, correspondente ao consumo restante de $c - 20$, é de $(c - 20)11,7940 = 11,794c - 235,88$, totalizando $(117,12) + (11,794c - 235,88) = 11,794c - 118,76$.
- Se $31 \leq c \leq 40$, o valor cobrado pelos primeiros 30 m³ de água, conforme a expressão do item acima, é de $11,794 \cdot (30) - 118,76 = 235,06$, e o valor restante, correspondente ao consumo restante de $c - 30$, é de $(c - 30)16,0660 = 16,066c - 481,98$, totalizando $(235,06) + (16,066c - 481,98) = 16,066c - 246,92$.
- Se $41 \leq c \leq 60$, o valor cobrado pelos primeiros 40 m³ de água, conforme a expressão do item acima, é de $16,066 \cdot (40) - 246,92 = 395,72$, e o valor restante, correspondente ao consumo restante de $c - 40$, é de $(c - 40)18,5370 = 18,537c - 741,48$, totalizando $(395,72) + (18,537c - 741,48) = 18,537c - 345,76$.
- Se $c \geq 61$, o valor cobrado pelos primeiros 60 m³ de água, conforme a expressão do item acima, é de $18,537 \cdot (60) - 345,76 = 766,46$, e o valor restante, correspondente ao consumo restante de $c - 60$, é de $(c - 60)21,1360 = 21,136c - 1268,16$, totalizando $(766,46) + (21,136c - 1268,16) = 21,136c - 501,70$.

Portanto, a lei de t é dada por:

$$t(c) = \begin{cases} 3,986c, & \text{se } 0 \leq c \leq 10 \\ 7,726c - 37,4, & \text{se } 11 \leq c \leq 20 \\ 11,794c - 118,76, & \text{se } 21 \leq c \leq 30 \\ 16,066c - 246,92, & \text{se } 31 \leq c \leq 40 \\ 18,537c - 345,76, & \text{se } 41 \leq c \leq 60 \\ 21,136c - 501,70, & \text{se } c \geq 61 \end{cases}$$

Atividades

62. a) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } x \leq 3 \\ x-1, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

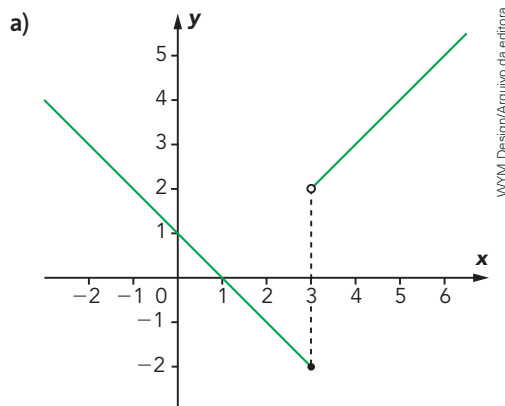
Não escreva no livro.

61. Considere a função dada por $f(x) = \begin{cases} 4x + 5, & \text{se } x \leq 1 \\ 9, & \text{se } 1 < x \leq 6 \\ -x + 14, & \text{se } x > 6 \end{cases}$.

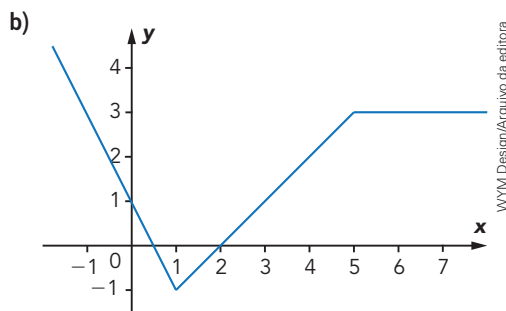
Calcule o que é pedido em cada item.

- a) $f(0)$ $f(0) = 5$ d) $f(5)$ $f(5) = 9$
 b) $f(-1)$ $f(-1) = 1$ e) $f(10)$ $f(10) = 4$
 c) $f(1)$ $f(1) = 9$ f) $f(6)$ $f(6) = 9$

62. Cada item a seguir apresenta o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença. No caderno, escreva a lei dessas funções.



$$b) f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{se } x < 1 \\ x - 2, & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ 3, & \text{se } x > 5 \end{cases}$$



63. Uma cidade tem a seguinte tabela de tarifas para o pagamento de água residencial. Observe que, caso o consumo seja entre 0 m^3 e 10 m^3 , há o pagamento de uma tarifa fixa de R\$ 23,57; para as demais medidas

de volume, os valores são cobrados conforme o consumo em cada faixa indicada na tabela.

Tarifa de consumo de água residencial mensal

Faixa de consumo (em m^3)	Tarifa de água (em R\$)
0 a 10	23,57 por mês
11 a 20	6,60 por m^3
21 a 50	11,69 por m^3
Acima de 50	12,27 por m^3

Tabela elaborada para fins didáticos.

Escreva no caderno a lei da função que modela a relação entre o consumo de água e a tarifa a pagar.

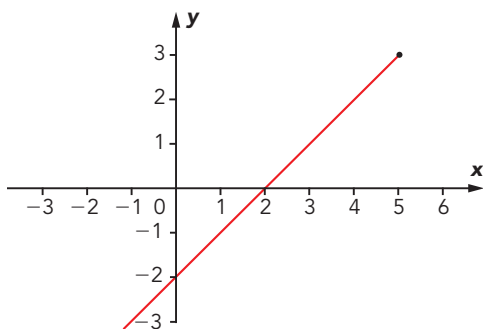
A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Gráficos de funções definidas por mais de uma sentença

Veja nos exemplos a seguir como construir gráficos no plano cartesiano de funções definidas por mais de uma sentença.

a) Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \leq 5 \\ 3, & \text{se } x > 5 \end{cases}$.

Primeiro construímos no plano cartesiano o gráfico da função dada por $g(x) = x - 2$, considerando a parte em que $x \leq 5$.



Observe que o domínio dessa função é $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$ e o conjunto imagem é $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$.

Por fim, podemos reunir as partes dos dois gráficos no mesmo plano cartesiano.

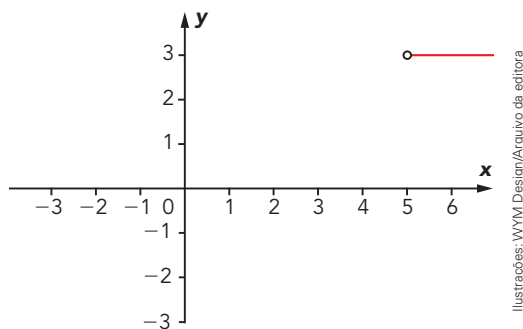
Veja ao lado o gráfico da função f dada.

O domínio dessa função é o conjunto dos números reais, como anteriormente explicitado. O conjunto imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$.

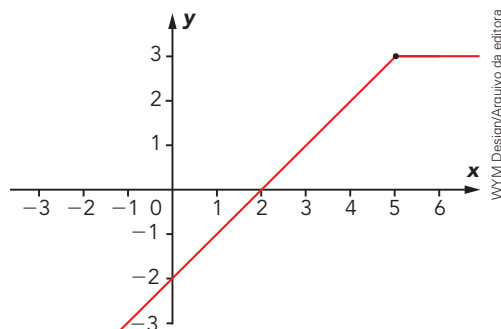
b) Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei

$$f(x) = \begin{cases} -3, & \text{se } x \leq -1 \\ 4x + 3, & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ -3x + 10, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

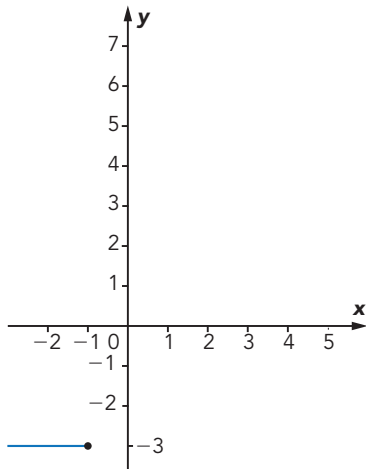
Na sequência, construímos no plano cartesiano o gráfico da função dada por $h(x) = 3$, considerando apenas a parte em que $x > 5$.



Observe que o domínio dessa função é $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$ e o conjunto imagem é $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 3\}$.

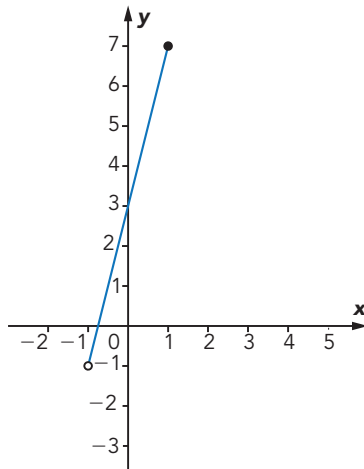


Primeiro construímos no plano cartesiano a parte do gráfico da função dada por $g(x) = -3$, em que $x \leq -1$.



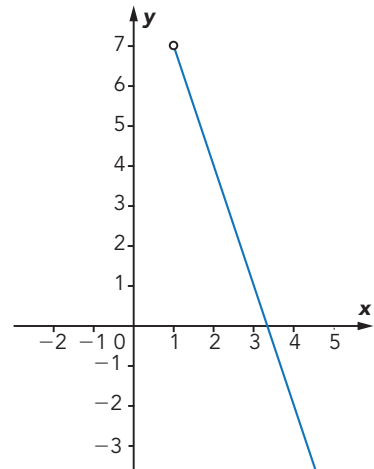
Observe que o domínio dessa função é $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ e o conjunto imagem é $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = -3\}$.

Na sequência, construímos no plano cartesiano a parte do gráfico da função dada por $h(x) = 4x + 3$, em que $-1 < x \leq 1$.



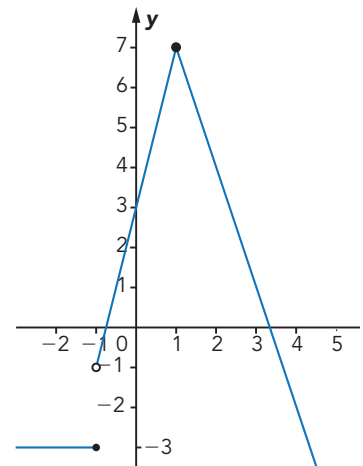
Observe que o domínio dessa função é $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\}$ e o conjunto imagem é $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 < y \leq 7\}$.

Depois, construímos no plano cartesiano a parte do gráfico da função dada por $j(x) = -3x + 10$, em que $x > 1$.



Observe que o domínio dessa função é $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ e o conjunto imagem é $\text{Im}(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 7\}$.

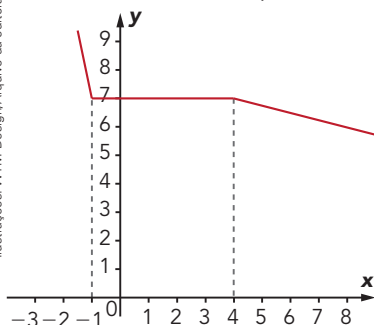
Por fim, podemos reunir as três partes dos gráficos das funções no mesmo plano cartesiano. Veja ao lado o gráfico da função f dada. O domínio dessa função é o conjunto dos números reais, como anteriormente explicitado. O conjunto imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 7\}$.



c) Considere a função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2, & \text{se } x < -1 \\ 7, & \text{se } -1 \leq x < 4 \\ -\frac{1}{4}x + 8, & \text{se } x \geq 4 \end{cases} \quad \text{A representação}$$

gráfica dela é apresentada a seguir.

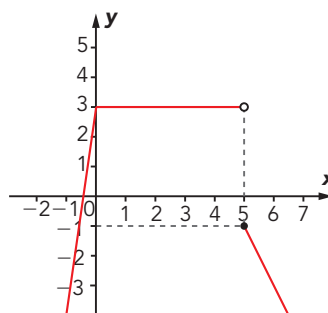


Nesse caso, temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

d) Considere a função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei

$$f(x) = \begin{cases} 7x + 3, & \text{se } x < 0 \\ 3, & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ -2x + 9, & \text{se } x \geq 5 \end{cases} \quad \text{A representação}$$

gráfica dela é apresentada a seguir.



Nesse caso, temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) =]-\infty, 3]$.

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Construção do gráfico de funções definidas por mais de uma sentença

Utilizaremos o GeoGebra Calculadora Gráfica para construir o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença no plano cartesiano. Você pode usar a versão *on-line* acessando <https://www.geogebra.org/?lang=pt>.

Vamos construir a representação gráfica da função dada pela lei $f(x) = \begin{cases} -6x - 9, & \text{se } x \leq -1 \\ x - 2, & \text{se } -1 < x \leq 6 \\ 4, & \text{se } x > 6 \end{cases}$ de duas

maneiras diferentes. Na primeira, vamos construir no plano cartesiano o gráfico de um jeito similar ao que fizemos anteriormente para uma função afim. Para isso, abra um novo documento e acesse as configurações de exibição (na parte superior direita da tela) para habilitar as opções de exibir os eixos e a malha principal.

1º passo: Vamos construir no plano cartesiano a parte do gráfico que corresponde à primeira sentença da função f . No campo Entrada de comando (situado na parte esquerda da tela, no caso da versão *on-line*), digite a lei da função **$g(x)=se(x \leq -1, -6x-9)$** e tecla "Enter". Observe que " $\leq$ " indica o sinal $\leq$ (menor do que ou igual a).

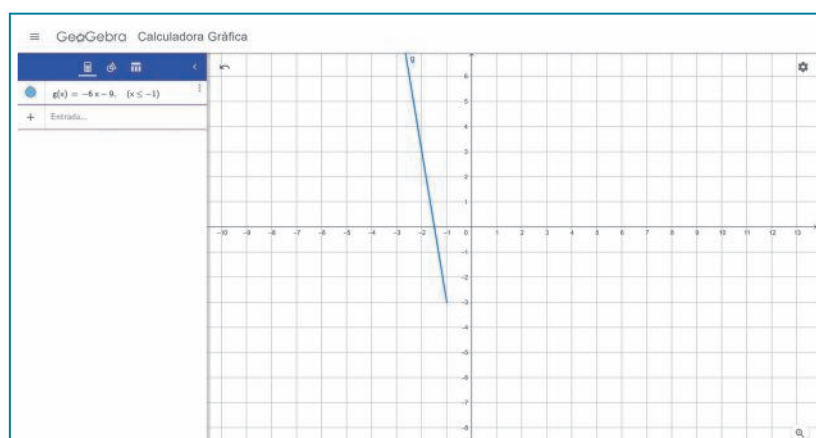
Essa expressão indica que, para cada x no plano cartesiano, caso $x \leq -1$, então y deve ser definido por $-6x - 9$.

Observe que só aparece a parte do gráfico em que $x \leq -1$.

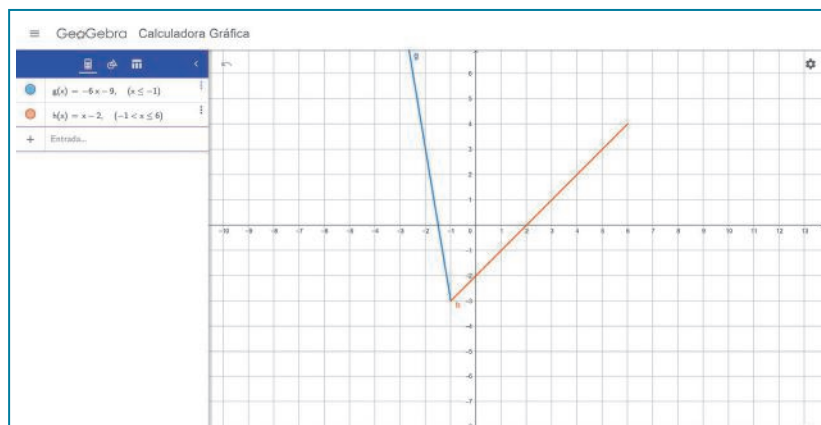
2º passo: Agora vamos construir no plano cartesiano a parte do gráfico que corresponde à segunda sentença da função f . No campo Entrada de comando digite a lei da função **$h(x)=se(-1 < x \leq 6, x-2)$** e tecla "Enter".

Essa expressão indica que, para cada x no plano cartesiano, caso $-1 < x \leq 6$, então y deve ser definido por $x - 2$.

Observe que, após digitar essa expressão, apareceu uma nova parte do gráfico da função f , que é correspondente ao intervalo $-1 < x \leq 6$.



Tela do GeoGebra após o 1º passo.

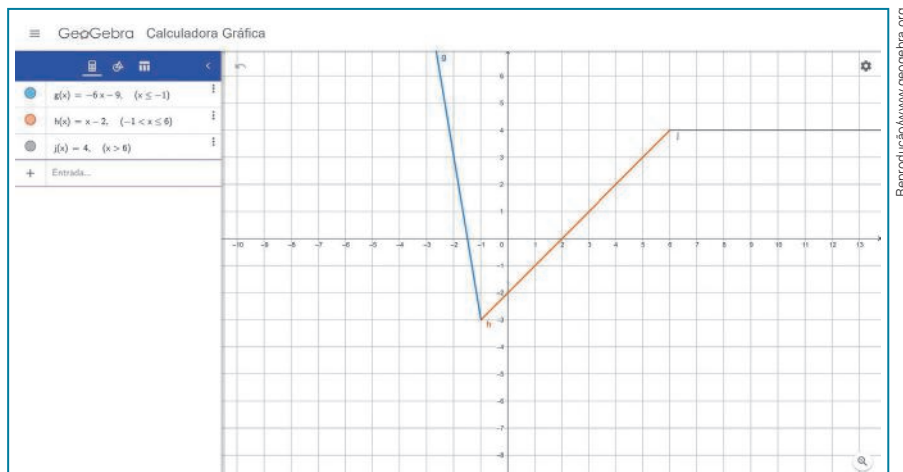


Tela do GeoGebra após o 2º passo.

3º passo: Por fim vamos construir no plano cartesiano a parte do gráfico que corresponde à terceira sentença da função f . No campo Entrada de comando digite a lei da função $j(x)=se(x>6,4)$ e tecla "Enter".

Essa expressão indica que, para cada x no plano cartesiano, caso $x > 6$, então y deve ser igual a 4.

Observe que, após digitar essa expressão, apareceu uma nova parte do gráfico da função f , que é correspondente ao intervalo $x > 6$.

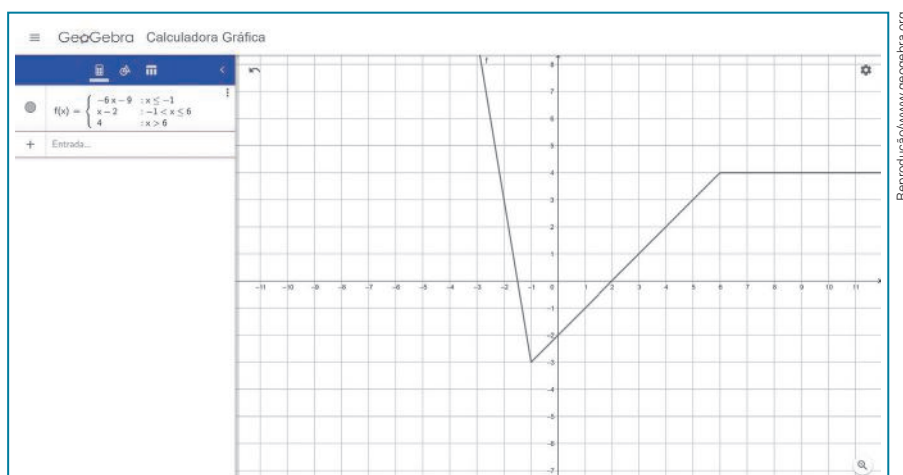


Tela do GeoGebra após o 3º passo.

Na segunda maneira, vamos construir no plano cartesiano o gráfico da função f com um único comando. Salve a construção que você fez, abra um novo documento e acesse as configurações de exibição para habilitar as opções de exibir os eixos e a malha principal. Depois, siga os passos a seguir.

4º passo: No campo Entrada digite a lei da função $f(x)=se(x<=-1,-6x-9, se(-1<x<=6, x-2,se(x>6,4)))$ e tecla "Enter". Observe que " $\leq$ " indica o sinal $\leq$ (menor ou igual a).

Observe que cada "se" refere-se a uma das sentenças da função f , de maneira que escrevemos primeiro a condição, isto é, o domínio, e depois a sentença que indica o valor de y em função de x .



Tela do GeoGebra após o 4º passo.

1. Compare as duas maneiras de obter o gráfico da função f . Qual delas você prefere? Quais são as vantagens e as desvantagens de cada uma delas? *Resposta pessoal.*
2. Analise as sentenças da função f e indique quais são crescentes, decrescentes e constantes. Justifique sua resposta.
 $-6x - 9$ é decrescente, pois $a = -6 < 0$.
 $x - 2$ é crescente, pois $a = 1 > 0$.
 4 é constante, pois $a = 0$.
3. Considere a função dada por $k(x) = \begin{cases} 2x + 4, & \text{se } x < 0 \\ -x + 4, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Escreva no caderno o comando único que gera a representação gráfica dessa função no GeoGebra.

$$k(x)=se(x<0,2x+4, se(x\geq 0,-x+4))$$

Professor, oriente os estudantes a testar no GeoGebra o código que escreveram.

Além da sala de aula

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste tópico encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

0 comando Se no GeoGebra

Na seção anterior você utilizou o comando **Se** no software GeoGebra. Esse comando realiza um **teste lógico** de uma condição para definir o valor de uma expressão – isto é, dependendo do valor de uma condição como verdadeira ou falsa, ele define o valor da expressão.

O comando **Se** tem duas sintaxes possíveis:

- Se[<Condição>, <Então>]
- Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]

Cada um dos termos entre "<" e ">" é chamado **parâmetro** desse comando.

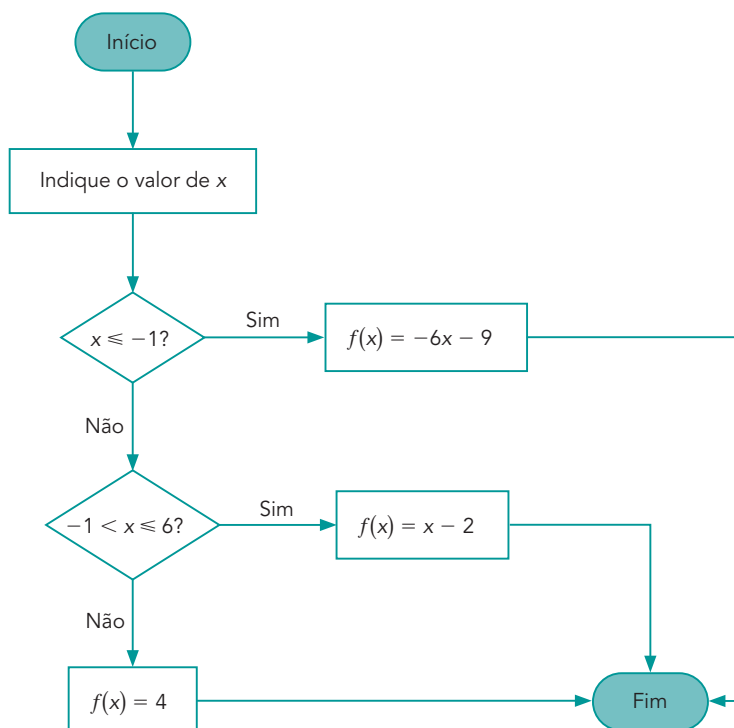
Na primeira sintaxe, é testado se <Condição> é uma expressão verdadeira. Caso seja, esse comando retorna o valor em <Então> e, caso <Condição> não seja verdadeira, nada é retornado. Na segunda sintaxe, também é testado se <Condição> é verdadeiro. Caso seja, o comando retorna o valor de <Então> e, caso não seja verdadeiro, o comando retorna o valor de <Senão>.

No GeoGebra, o gráfico da função f foi construído no programa utilizando o seguinte comando:

f(x)= se(x <= -1, -6x - 9, se(-1 < x <= 6, x - 2, se(x > 6,4)))

Note que, nesse comando, no lugar do parâmetro <Senão>, foi colocado outro comando **Se**. E, novamente, no lugar do parâmetro <Senão> do segundo comando **Se**, foi colocado um terceiro comando **Se**.

Vejamos como esse comando do GeoGebra pode ser representado em um fluxograma.



1. Como seria o comando utilizado no GeoGebra para construir o gráfico da função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \leq 0 \\ x, & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ 2x - 6, & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

2. Escreva no caderno um fluxograma que represente o funcionamento do comando da atividade anterior.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

64. A matéria pode se apresentar em 3 estados físicos (ou fases): sólido, líquido e gasoso (há outros menos conhecidos, como o plasma e o coloide). Ela pode passar de um estado a outro mediante alterações na medida de temperatura, e essas mudanças de estado recebem nomes específicos. Por exemplo:

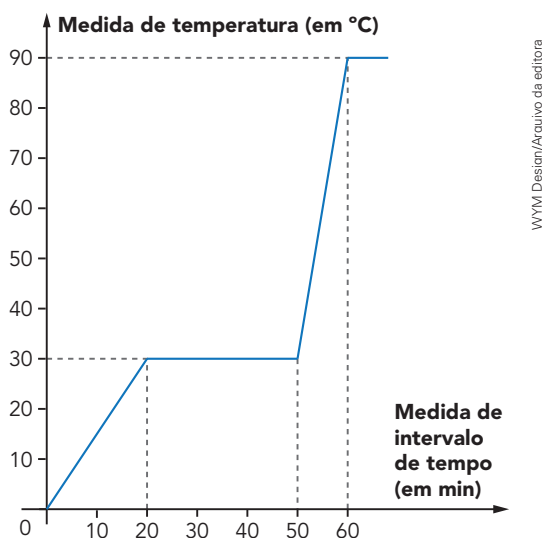
- fusão: mudança de sólido para líquido;
- ebulição: mudança de líquido para gasoso (vaporização tumultuosa, com formação de bolhas).

As medidas de temperatura em que se iniciam as mudanças de estado são:

- ponto de fusão: em que se inicia a fusão;
- ponto de ebulição: em que se inicia a ebulição.

Se a matéria formada por uma única substância no estado sólido é aquecida, a medida de temperatura aumenta até que se inicie a fusão e permanece constante até que toda a matéria passe para o estado líquido. Em seguida, se a matéria continua sendo aquecida, a medida de temperatura aumenta novamente até atingir o ponto de ebulição e permanece constante até toda a matéria passar para o estado gasoso, quando então volta a subir.

Suponha que determinada substância, inicialmente no estado sólido, tenha a curva de aquecimento mostrada na representação gráfica abaixo.



De acordo com essa curva, indique no caderno a afirmação correta. **Alternativa c.**

- As fases líquida e sólida aparecem simultaneamente durante 20 min.
- O ponto de ebulição é alcançado quando a medida de temperatura atinge os 30 °C.
- A medida de intervalo de tempo em que a substância está somente no estado líquido é de 10 min.
- O ponto de fusão dessa substância ocorre quando a medida de temperatura chega a 0 °C.
- Entre 50 min e 60 min temos uma função afim definida por $f: [50, 60] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 6t + 270$.

65. Leia o texto a seguir.

Estádio da Copa-2018 chama atenção por arquibancadas com “puxadinho”

Um dos palcos para a Copa do Mundo da Rússia de 2018 tem chamado a atenção por uma peculiaridade: arquibancadas construídas fora do estádio. A Ekaterinburg Arena utilizou a estratégia para poder cumprir o número de lugares exigidos pela Fifa.

Construído em 1957, o estádio tinha capacidade para 27 mil pessoas, número abaixo do que a Fifa exige até mesmo para jogos da fase de grupos da Copa do Mundo. Com a reforma completa pela qual o local está passando, o número subirá para 35 mil lugares.

ESTÁDIO da Copa-2018 chama atenção por arquibancadas com “puxadinho”. *UOL*, 3 out. 2017. Disponível em: <https://esporte.uol.com.br/futebol/ultimas-noticias/2017/10/03/arena-da-copa-chama-atencao-por-arquibancadas-construidas-fora-do-estadio.htm>. Acesso em: 8 jun. 2020.

Sabendo que os ingressos mais baratos para os russos custaram R\$ 69,00 e os mais baratos para os turistas custaram R\$ 105,00, indique no caderno V para as proposições verdadeiras e F para as falsas.

- Após a reforma, o aumento na capacidade de torcedores foi superior a 20 mil.
- Se x torcedores turistas forem ao estádio ($x \leq 35000$) e todos comprarem os ingressos mais baratos, a renda bruta y , em reais será dada por $y = 105x$.
- Se o estádio estiver com todos os assentos ocupados por russos, a renda dessa partida será superior a 2 milhões de reais.
- Em uma partida em que todos os lugares estejam ocupados e $\frac{5}{7}$ dos torcedores sejam turistas que compraram os ingressos mais baratos, a renda com a venda de ingressos será de R\$ 3.315.000,00.

66. O aquecedor de uma estufa é ligado quando a medida de temperatura chega a 0 °C. Sabendo que essa medida de temperatura em graus Celsius varia linearmente com a medida de intervalo de tempo em minutos, verificou-se que:

- transcorridos 5 minutos, a medida de temperatura era 10 °C;
- passados exatamente 5 minutos, um mecanismo foi acionado fazendo a variação da medida de temperatura em relação à medida de intervalo de tempo continuar linear, mas em uma proporção diferente;
- transcorridos 10 minutos, a medida de temperatura era 40 °C e, a partir daí, o aquecedor foi regulado para que a medida de temperatura permanecesse constante;
- o aquecedor foi desligado 20 minutos depois de acionado.

- No caderno, utilize régua milimetrada e construa um gráfico que represente essa variação das medidas de temperatura durante os 20 minutos em que o aquecedor esteve ligado. **A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.**

$$66. b) y = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ 6x - 20, & \text{se } 5 \leq x \leq 10 \\ 40, & \text{se } 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

Não escreva no livro.

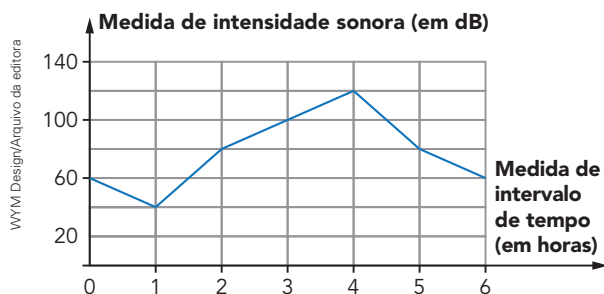
- b) No caderno, indique a lei da função que determina essa variação das medidas de temperatura obedecendo às condições indicadas.
- c) Determine no caderno a medida de temperatura aos 2 minutos, aos 8 minutos e aos 12 minutos.
- d) Em qual intervalo de tempo a temperatura e o tempo decorrido são grandezas diretamente proporcionais? Justifique.

67. O decibel (dB) é uma unidade de medida de intensidade sonora. Alguns sons comuns e as respectivas medidas de intensidade, em decibéis, são:

- Cochicho: 10 dB;
- Conversa normal: 20 dB;
- Música baixa: 40 dB;
- Motor de caminhão: 70 dB;
- Buzina: 100 dB;
- Show de rock: 110 dB;
- Avião decolando: 120 dB.

Fonte de consulta: HELERBROCK, Rafael. Intensidade do som. Mundo Educação. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/velocidade-intensidade-som.htm>. Acesso em: 30 jul. 2020.

Ao longo de 6 horas, uma pessoa foi exposta a diferentes intensidades sonoras, como mostra a representação gráfica a seguir.



Observando esse gráfico e sabendo que a exposição a sons com medida de intensidade sonora acima de 80 dB é prejudicial à saúde, responda aos itens no caderno.

- a) Durante qual medida de intervalo de tempo essa pessoa ficou submetida a uma medida de intensidade sonora não recomendável? 3 h
- b) Por quantas horas a medida da intensidade sonora foi decrescente ao longo do intervalo de tempo indicado no gráfico? 3 h
- c) Qual era a medida da intensidade sonora a que essa pessoa estava submetida quando transcorreram 3 horas e 15 minutos? 105 dB

68. Segundo a Receita Federal, o IRPF:

Incide sobre a renda e os proventos de contribuintes residentes no País ou residentes no exterior que recebam rendimentos de fontes no Brasil. Apresenta alíquotas variáveis conforme a renda dos contribuintes,

de forma que os de menor renda não sejam alcançados pela tributação.

BRASIL. Subsecretaria de Tributação e Contencioso. IRPF (Imposto sobre a renda das pessoas físicas). *Receita Federal*, 3 jan. 2020. Disponível em: <http://receita.economia.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica>. Acesso em: 23 abr. 2020.

O cálculo do IRPF mensal, em 2020, foi feito de acordo com a renda do contribuinte, segundo a tabela a seguir.

Tabela de incidência mensal

Base de cálculo (em R\$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir do IRPF (em R\$)
Até 1.903,98	–	–
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,8
De 2.826,66 até 3.751,05	15	354,8
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte de consulta: BRASIL. Subsecretaria de Tributação e Contencioso. IRPF (Imposto sobre a renda das pessoas físicas). *Receita Federal*, 3 jan. 2020. Disponível em: <http://receita.economia.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica>. Acesso em: 23 abr. 2020.

Para saber como calcular o IRPF mensal, acompanhe o exemplo a seguir. Um contribuinte ganha R\$ 4.250,00 de salário bruto mensal. Consultando a tabela, observa-se que, sobre esse valor, incide uma alíquota de 22,5%, e 22,5% de R\$ 4.250,00 é R\$ 956,25. Consultando a terceira coluna da tabela, a parcela a deduzir desse valor é R\$ 636,13. Portanto, o IRPF mensal para esse contribuinte será de R\$ 956,25 – R\$ 636,13 = R\$ 320,12.

Note que, conforme a tabela, contribuintes que ganham até R\$ 1.903,98 mensais estão isentos do IRPF.

- a) Considere um contribuinte que ganha x reais mensais. Como estamos lidando com valores monetários, na prática, x é um número racional com duas casas decimais (ou uma aproximação racional). Considerando que seria possível calcular o IRPF para qualquer valor de x pertencente a $\mathbb{R}_+^*$, construa no caderno o gráfico de uma função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ que fornece o IRPF pago mensalmente por esse contribuinte.

O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

- b) Em qual(is) intervalo(s) essa função é constante? Em qual(is) intervalo(s) essa função é crescente? $0 < x \leq 1.903,98$. $x \geq 1.903,99$.
- c) Por que as alíquotas são maiores para as faixas salariais maiores? Para que os contribuintes de menor renda paguem valores menores de IRPF em relação ao salário bruto.

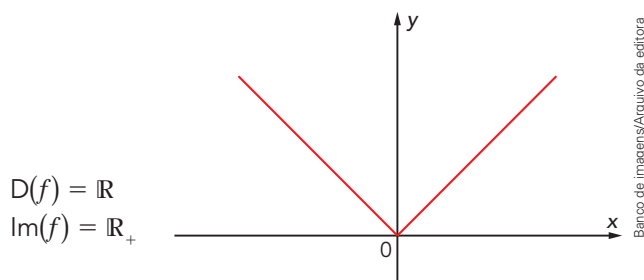
66. d) Em $[0, 5]$, pois se a medida de intervalo de tempo x , em minutos, é tal que $x \in [0, 5]$, então a medida de temperatura t , em graus Celsius, e a medida de intervalo de tempo decorrida estão relacionados por uma função linear de lei $t(x) = 2x$.

Função modular

Um tipo de função definida por mais de uma sentença é a **função modular** ou **função módulo**.

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, em que $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, é a função do módulo de x . Portanto, a lei de f é dada por $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Veja a representação gráfica de f a seguir.



Observe que:

- para $x < 0$, temos o gráfico da função afim dada por $f(x) = -x$;
- para $x \geq 0$, temos o gráfico da função afim dada por $f(x) = x$.

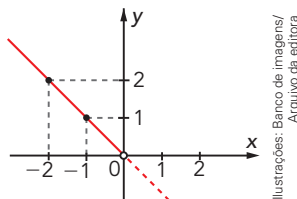
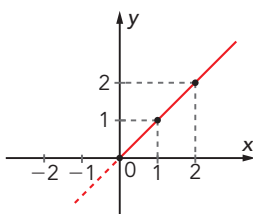
Gráfico da função modular

Vamos construir o gráfico da função modular dada por $f(x) = |x|$.

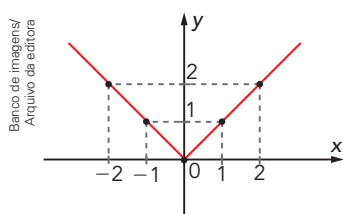
- $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = |x| = x$
- $x < 0 \Rightarrow f(x) = |x| = -x$

x	$y = f(x)$
0	0
1	1
2	2

x	$y = f(x)$
-1	1
-2	2



Colocando as duas condições em um só plano cartesiano, obtemos o gráfico de $f(x) = |x|$.



Fique atento

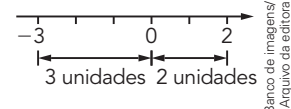
O módulo ou valor absoluto de um número real x , que representamos por $|x|$, é considerado:

- igual a x , se $x \geq 0$;
- igual a $-x$, se $x < 0$.

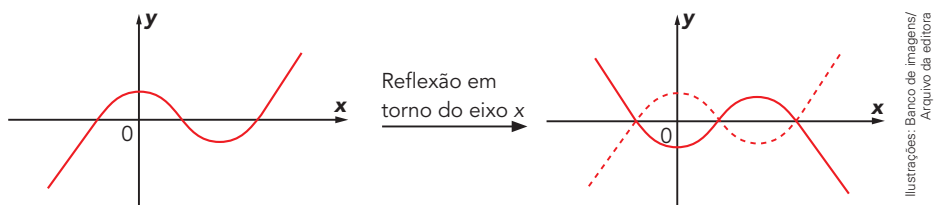
Geometricamente, o módulo de um número indica, na reta real orientada, a medida de distância desse número ao zero.

A medida de distância do 2 ao 0 é 2 unidades, então: $|2| = 2$.

A medida de distância do -3 ao 0 é 3 unidades, então: $|-3| = 3$.



Observação: Podemos construir a representação gráfica de $f(x) = |x|$ a partir da representação gráfica de $g(x) = x$ usando o conceito de reflexão. A reflexão de um ponto (x, y) em torno do eixo x é o ponto $(x, -y)$. Assim, a reflexão de um gráfico em torno do eixo x é:



Ou seja, os valores de $f(x)$ negativos tornam-se positivos, e vice-versa.

No caso dos gráficos de funções modulares do tipo $f(x) = |g(x)|$, podemos obtê-los fazendo a reflexão da parte do gráfico de g cujas imagens sejam negativas. Assim:

Gráfico de $f(x) = x$

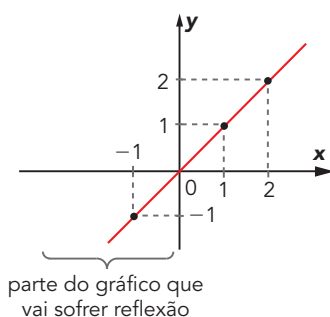
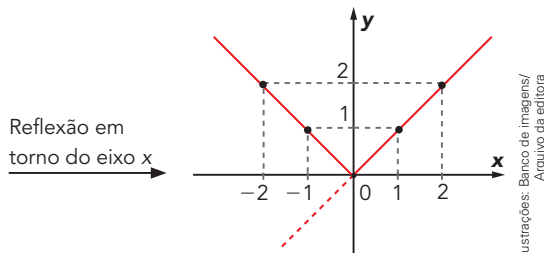


Gráfico de $f(x) = |x|$



Atividades resolvidas

11. Dada a lei da função $f(x) = |2x - 8|$:

- calcule $f(0)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ e $f(8)$;
- escreva $f(x)$ com sentenças que não têm módulo;
- use os resultados do item **a** e construa a representação gráfica de f .

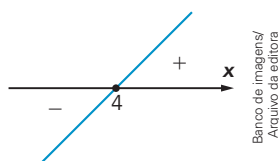
Resolução

- $f(0) = |2 \cdot 0 - 8| = |-8| = 8$
 $f(3) = |2 \cdot 3 - 8| = |-2| = 2$
 $f(4) = |2 \cdot 4 - 8| = |0| = 0$
 $f(5) = |2 \cdot 5 - 8| = |2| = 2$
 $f(8) = |2 \cdot 8 - 8| = |8| = 8$

Fique atento

O módulo de um número real é sempre positivo ou nulo.

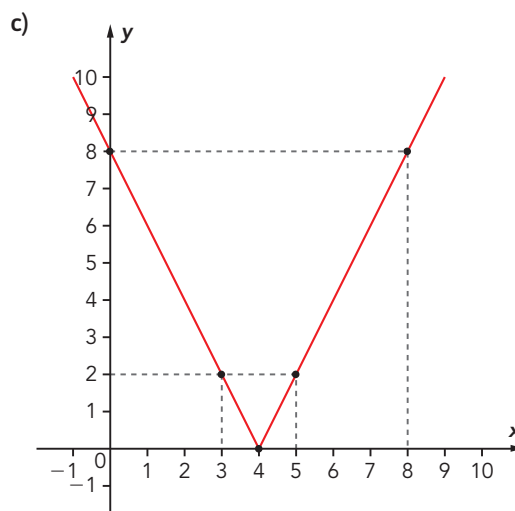
- $2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$



$$x \geq 4 \Rightarrow 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow f(x) = |2x - 8| = 2x - 8$$

$$x < 4 \Rightarrow 2x - 8 < 0 \Rightarrow f(x) = |2x - 8| = -(2x - 8) = -2x + 8$$

$$\text{Logo: } f(x) = \begin{cases} 2x - 8, & \text{se } x \geq 4 \\ -2x + 8, & \text{se } x < 4 \end{cases}$$



12. Esboce a representação gráfica das funções apresentadas em cada item a seguir.

a) $f(x) = |x| + 1$

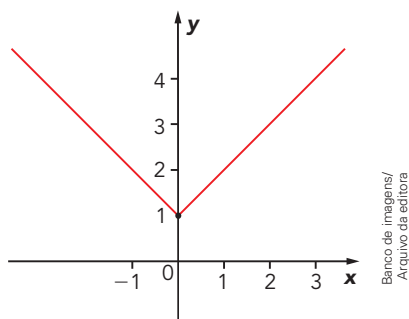
b) $f(x) = |x - 3| + 2$

Resolução

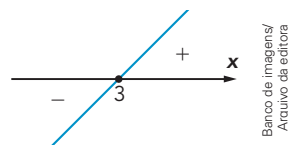
a) Se $x \geq 0$, então $f(x) = |x| + 1 = x + 1$.

Se $x < 0$, então $f(x) = |x| + 1 = -x + 1$.

Portanto, a representação gráfica de f é dada pela representação gráfica de $g(x) = x + 1$, para $x \geq 0$, e pelo gráfico de $h(x) = -x + 1$, para $x < 0$.



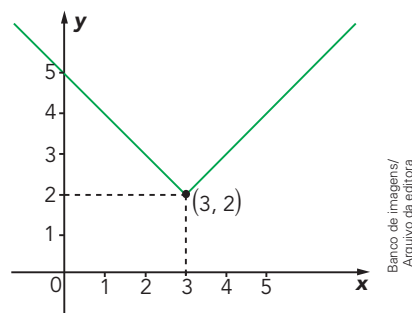
b) $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$



Se $x \geq 3$, então $f(x) = |x - 3| + 2 = (x - 3) + 2 = x - 1$.

Se $x < 3$, então $f(x) = |x - 3| + 2 = -(x - 3) + 2 = -x + 3 + 2 = 5 - x$.

Portanto, a representação gráfica de f é dada pela representação gráfica de $g(x) = x - 1$, para $x \geq 3$, e pelo gráfico de $h(x) = 5 - x$, para $x < 3$.



69. a) $f(x) = \begin{cases} -3x + 15, & \text{se } x < 5 \\ 3x - 15, & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$

70. b) $f(x) = \begin{cases} 7 - x, & \text{se } x < 3 \\ x + 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

Atividades

Não escreva no livro.

69. Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |-3x + 15|$.

a) Escreva no caderno $f(x)$ sem utilizar módulo nas sentenças.

b) Calcule $f(2)$, $f(7)$, $f(-1)$ e $f(5)$ usando a lei dada ou a resposta obtida no item a.

$f(2) = 9$; $f(7) = 6$; $f(-1) = 18$; $f(5) = 0$.

70. Dada a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |3 - x| + 4$, faça o que se pede no caderno.

a) Determine $f(8)$, $f(-1)$, $f(3)$ e $f(0)$.

$f(8) = 9$; $f(-1) = 8$; $f(3) = 4$; $f(0) = 7$.

b) Escreva $f(x)$ usando sentenças sem módulo.

c) Construa o gráfico de f no plano cartesiano. O gráfico encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.

d) Determine $D(f)$ e $\text{Im}(f)$.

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$.

71. Analisando a definição e o gráfico da função modular dada por $f(x) = |x|$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, f é crescente ou decrescente?

f é crescente para $x > 0$ e é decrescente para $x < 0$.

72. Utilize régua milimetrada e construa no caderno o gráfico de cada função dada.

a) $f(x) = |x - 3|$

c) $f(x) = |x| - 3$

b) $f(x) = |x + 1|$

d) $f(x) = |x + 3| - 1$

As respostas encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.

73. Em uma cidade, no início de cada mês, ao receber o salário, os moradores vão ao supermercado para abastecer a despensa. Depois, a quantidade de pessoas que vão às compras passa a diminuir, até aproximar-se o dia 20, quando ocorre uma ligeira alta em decorrência dos adiantamentos salariais que muitas empresas realizam. Uma função que retrata essa situação pode ser dada pela lei $f(x) = 500 + |100 - 5x|$, para $1 \leq x \leq 30$, em que x representa o dia do mês e $f(x)$, a quantidade de pessoas que visitam o supermercado nesse dia. Considere um supermercado que permanece aberto das 7 h até as 22 h todos os dias do mês.

Analisar as afirmações e indique no caderno qual delas é a verdadeira. Alternativa a.

- a) O maior número de pessoas no supermercado ocorre no dia primeiro de cada mês.
- b) No dia 19 de cada mês apenas 40 pessoas vão ao supermercado.
- c) Pelo menos em 1 dia de cada mês ninguém vai ao supermercado.
- d) A quantidade de pessoas que vai ao supermercado nos dias 10 e 20 é igual.
- e) A quantidade de pessoas que vai ao supermercado diminui do dia 20 ao dia 30.

Vestibulares e Enem

- 1. (UEA-AM)** No dia do lançamento de determinado produto, foram vendidas 200 unidades. A partir do segundo dia e nas 9 semanas seguintes, o número de unidades vendidas semanalmente aumentou de acordo com a função $f(x) = 40x + 200$, sendo $f(x)$ o número de unidades vendidas semanalmente e x o número de semanas, com $1 \leq x \leq 9$. Em relação ao número de unidades vendidas na 3ª semana, o número de unidades vendidas na 9ª semana corresponde a um aumento de:

a) 85%. c) 75%. e) 65%.
b) 80%. d) 70%.

- 2. (Uncisal)** Uma ONG encomendou um estudo de viabilidade referente à construção de uma usina de reciclagem de resíduos. Segundo esse estudo, a quantidade diária de resíduos recolhidos, $M(c)$, em kg, em função da quantidade de catadores, c , satisfaz à equação $M(c) = 3c$. O estudo previu, ainda, que a produção de material reciclado, em kg, em função da quantidade diária de resíduos recolhidos, m , em kg, satisfaz à equação $R(m) = \frac{4}{5}m - 5$. Além disso, também ficou evidenciado pelo estudo que a usina seria viável se a produção de material reciclado fosse de pelo menos 19 kg por dia.

Disponível em: www.reciclarbrasil.com.br.
Acesso em: 15 nov. 2018 (adaptado).

Nas condições mostradas pelo estudo, a construção dessa usina será viável se a quantidade de catadores for, no mínimo, igual a: **Alternativa d.**

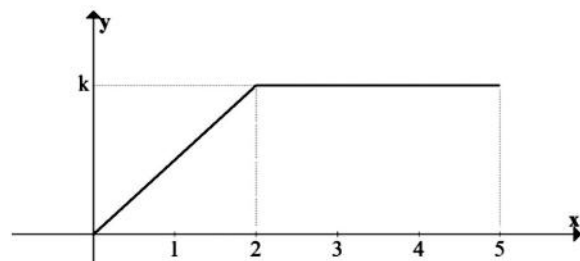
a) 6. c) 9. e) 11.
b) 8. d) 10.

- 3. (Unipe-PB)** Um paciente com febre foi medicado às 9 h 25 min, e, a partir de então, sua temperatura diminuiu como uma função do 1º grau do tempo.

Se às 10 h 10 min, sua temperatura estava em $38,7^\circ\text{C}$, e, às 10 h 40 min, chegou em $38,1^\circ\text{C}$, então no momento da medicação ela era de: **Alternativa 05.**

01) $39,2^\circ\text{C}$. 03) $39,4^\circ\text{C}$. 05) $39,6^\circ\text{C}$.
02) $39,3^\circ\text{C}$. 04) $39,5^\circ\text{C}$.

- 4. (UEG-GO)** A função $f(x)$ que representa o gráfico a seguir, onde k é uma constante não nula, é dada por: **Alternativa a.**



$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ k, & \text{se } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} k, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 3k, & \text{se } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ kx, & \text{se } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

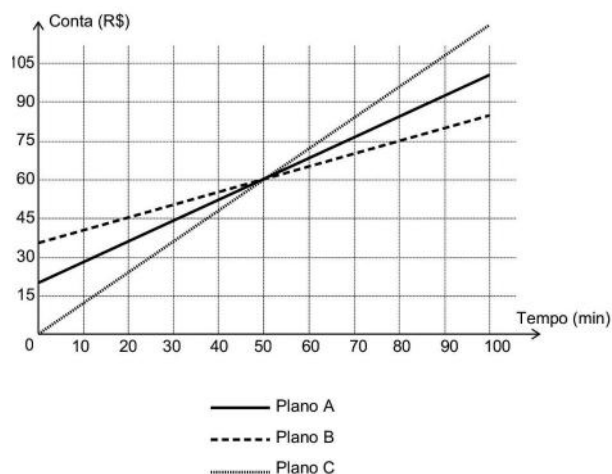
$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ k, & \text{se } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x, & \text{se } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

- 5. (UFRGS-RS)** Para produzir determinado tipo de tecido, uma fábrica gasta R\$ 2,20 por metro. Além disso, há uma despesa fixa de R\$ 2.500,00, independente da quantidade de metros produzidos. Se cada metro do tecido é vendido por R\$ 4,00, o número mínimo de metros no qual a fábrica passa a ter lucro com a venda é:

a) 1388. c) 1390. e) 1392. **Alternativa b.**
b) 1389. d) 1391.

- 6. (Enem)** Na intenção de ampliar suas fatias de mercado, as operadoras de telefonia apresentam diferentes planos e promoções. Uma operadora oferece três diferentes planos baseados na quantidade de minutos utilizados mensalmente, apresentados no gráfico. Um casal foi à loja dessa operadora para comprar dois celulares, um para a esposa e outro para o marido. Ela utiliza o telefone, em média, 30 minutos por mês, enquanto ele, em média, utiliza 90 minutos por mês.



Reprodução/Enem 2018.

Com base nas informações do gráfico, qual é o plano de menor custo mensal para cada um deles? **Alternativa e.**

- a) O plano A para ambos.
- b) O plano B para ambos.
- c) O plano C para ambos.
- d) O plano B para a esposa e o plano C para o marido.
- e) O plano C para a esposa e o plano B para o marido.

7. (Enem) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ 1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y , em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por: **Alternativa d.**

- a) $Y = 80X + 920$.
- b) $Y = 80X + 1000$.
- c) $Y = 80X + 1080$.
- d) $Y = 160X + 840$.
- e) $Y = 160X + 1000$.

8. (Enem) Em um município foi realizado um levantamento relativo ao número de médicos, obtendo-se os dados:

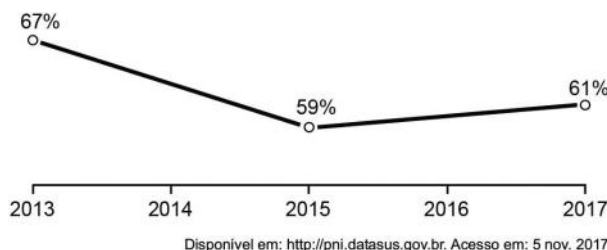
Ano	Médicos
1980	137
1985	162
1995	212
2010	287

Tendo em vista a crescente demanda por atendimento médico na rede de saúde pública, pretende-se promover a expansão, a longo prazo, do número de médicos desse município, seguindo o comportamento de crescimento linear no período observado no quadro.

Qual a previsão do número de médicos nesse município para o ano 2040? **Alternativa c.**

- a) 387
- b) 424
- c) 437
- d) 574
- e) 711

9. (Enem) A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas dos anos de 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.

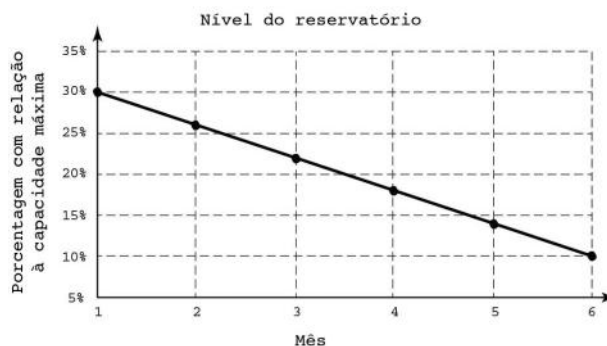


Disponível em: <http://pni.datasus.gov.br>. Acesso em: 5 nov. 2017.

Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014? **Alternativa b.**

- a) 62,3%
- b) 63,0%
- c) 63,5%
- d) 64,0%
- e) 65,5%

10. (Enem) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade? **Alternativa a.**

- a) 2 meses e meio.
- b) 3 meses e meio.
- c) 1 mês e meio.
- d) 4 meses.
- e) 1 mês.

11. (Enem) Os consumidores **X**, **Y** e **Z** desejam trocar seus planos de internet móvel na tentativa de obterem um serviço de melhor qualidade. Após pesquisarem, escolheram uma operadora que oferece cinco planos para diferentes perfis, conforme apresentado no quadro.

Plano	Franquia	Preço mensal de assinatura	Preço por MB excedente
A	150 MB	R\$ 29,90	R\$ 0,40
B	250 MB	R\$ 34,90	R\$ 0,10
C	500 MB	R\$ 59,90	R\$ 0,10
D	2 GB	R\$ 89,90	R\$ 0,10
E	5 GB	R\$ 119,90	R\$ 0,10

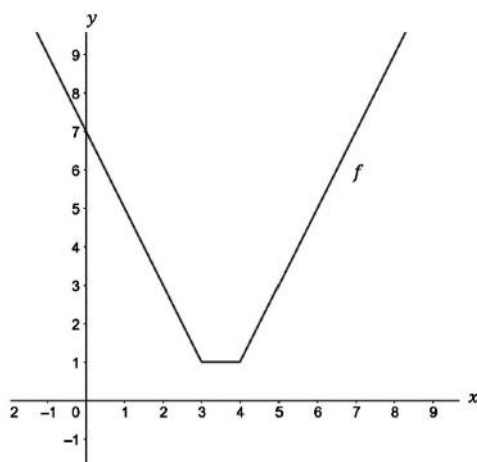
Dado: 1 GB = 1024 MB

Em cada plano, o consumidor paga um valor fixo (preço mensal da assinatura) pela franquia contratada e um valor variável, que depende da quantidade de MB utilizado além da franquia. Considere que a velocidade máxima de acesso seja a mesma, independentemente do plano, que os consumos mensais de **X**, **Y** e **Z** são de 190 MB, 450 MB e 890 MB, respectivamente, e que cada um deles escolherá apenas um plano.

Com base nos dados do quadro, as escolhas dos planos com menores custos para os consumidores **X**, **Y** e **Z**, respectivamente, são: **Alternativa c.**

- a) **A**, **C** e **C**. c) **B**, **B** e **D**. e) **B**, **C** e **D**.
b) **A**, **B** e **D**. d) **B**, **C** e **C**.

12. (UFMS) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função modular, representada pelo gráfico a seguir:

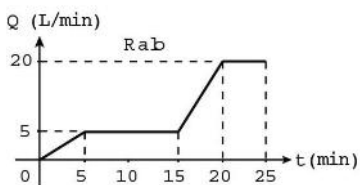
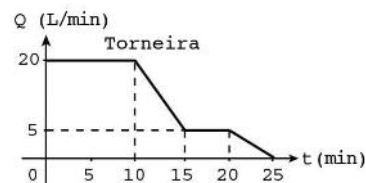


Reprodução/UFMS, 2020.

A função f pode ser representada por: **Alternativa b.**

- a) $|x| + |x + 7|$. d) $|x + 2| + |x + 5|$.
b) $|3 - x| + |x - 4|$. e) $|x + 9| - |3x + 2|$.
c) $-|x| + |x - 7|$.

13. (Enem) Um reservatório é abastecido com água por uma torneira e um ralo faz a drenagem da água desse reservatório. Os gráficos representam as vazões Q , em litro por minuto, do volume de água que entra no reservatório pela torneira e do volume que sai pelo ralo, em função do tempo t , em minuto.



Ilustrações: Reprodução Enem 2016.

Em qual intervalo de tempo, em minuto, o reservatório tem uma vazão constante de enchimento? **Alternativa b.**

- a) De 0 a 10. d) De 15 a 25.
b) De 5 a 10. e) De 0 a 25.
c) De 5 a 15.

14. (UnirG-TO) Um trabalhador recebe um salário mensal composto de um valor fixo de R\$ 1.300,00 e de uma parte variável. A parte variável corresponde a uma comissão de 6% do valor total de vendas que ele fizer durante o mês. A expressão matemática que representa o salário do trabalhador é: **Alternativa a.**

- a) $f(x) = 0,06x + 1300$. c) $f(x) = 0,78x + 1300$.
b) $f(x) = 0,6x + 1300$. d) $f(x) = 6x + 1300$.

15. (UEG-GO) No centro de uma cidade, há três estacionamentos que cobram da seguinte maneira:

Estacionamento A	R\$ 5,00 pela primeira hora, R\$ 3,00 por cada hora subsequente.
Estacionamento B	R\$ 4,00 por hora.
Estacionamento C	R\$ 6,00 pela primeira hora, R\$ 2,00 por cada hora subsequente.

Será mais vantajoso, financeiramente, parar:

- a) no estacionamento A, desde que o automóvel fique estacionado por quatro horas. **Alternativa d.**
b) no estacionamento B, desde que o automóvel fique estacionado por três horas.
c) em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.
d) em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por duas horas.
e) no estacionamento C, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.

16. (UPE) No mês de setembro, uma loja de roupas teve um lucro $[L(y)]$ de R\$ 40.200,00, em função do que foi investido (y), como representado na expressão $L(y) = 8y + 200$. Quanto deverá ser o investimento em reais no mês de outubro, para que o lucro obtido quadruplique, considerando essa mesma expressão para o lucro? **Alternativa d.**

- a) 20.000,00 d) 20.075,00
b) 20.035,00 e) 20.100,00
c) 20.045,00

CAPÍTULO

2

Função quadrática

Em um jogo de basquete, o objetivo é lançar a bola de maneira que ela passe por um aro, que fica a uma medida de comprimento de altura de 3,05 metros. No lance livre, o jogador precisa arremessar a bola estando atrás de uma linha que fica a 4,6 metros de distância da tabela.

Ottar Orakci/Getty Images

A linha de robôs CUE começou como um projeto voluntário de uma equipe de uma empresa automotiva japonesa na busca por desenvolver um robô que utilizasse inteligência artificial para acertar 100% dos arremessos realizados em uma cesta de basquete. Em junho de 2019, em Tóquio (Japão), após duas versões e diversas tentativas de obter esse percentual de acerto, o robô CUE3 – 3ª versão dos robôs da série CUE – foi posto à prova para conquistar uma menção no *Guinness World Records*, o livro dos recordes, ao buscar ser bem-sucedido no maior número de lançamentos livres de basquete consecutivos.

Para acertar as cestas, o CUE3 é equipado com sensores que reconhecem a quadra e a posição da cesta e utilizam esses dados para calcular a trajetória ideal e a força necessária para alcançá-la.

O sistema de avaliação do *Guinness* era rígido e claro: uma vez posicionado o robô, a equipe não poderia fazer ajustes na posição dele e, após 5 arremessos, o número de arremessos consecutivos obtido seria o valor oficial do recorde. Isso significa que, se CUE3 acertasse 5 arremessos consecutivos, mas errasse o sexto, o valor do recorde seria de 5 arremessos – valor que, segundo a equipe, poderia ser facilmente superado por outras equipes.

Depois de 6 horas, entretanto, CUE3 alcançou a marca de 2000 cestas consecutivas! E, 6 horas e 35 minutos depois do início do desafio, CUE3 alcançou a meta da equipe de 2020 lances, em homenagem aos Jogos Olímpicos de Verão de 2020, que aconteceriam em Tóquio, mas foram adiados devido à pandemia do Covid-19.

Fontes de consulta: SANTINO, R. Robô jogador de basquete acerta 2020 arremessos na sequência e entra no Guinness. *Olhar Digital*, 25 jun. 2019. Disponível em: <https://olhardigital.com.br/noticia/robo-jogador-de-basquete-acerta-2-020-arremessos-na-sequencia-e-entra-no-guinness/87292>; THE DEVELOPMENT Diary of CUE, the AI Basketball Robot: Second story. *Toyota*, 24 jun. 2019. Disponível em: <https://global.toyota/en/newsroom/corporate/28595150.html>. Acesso em: 5 maio 2020.



Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

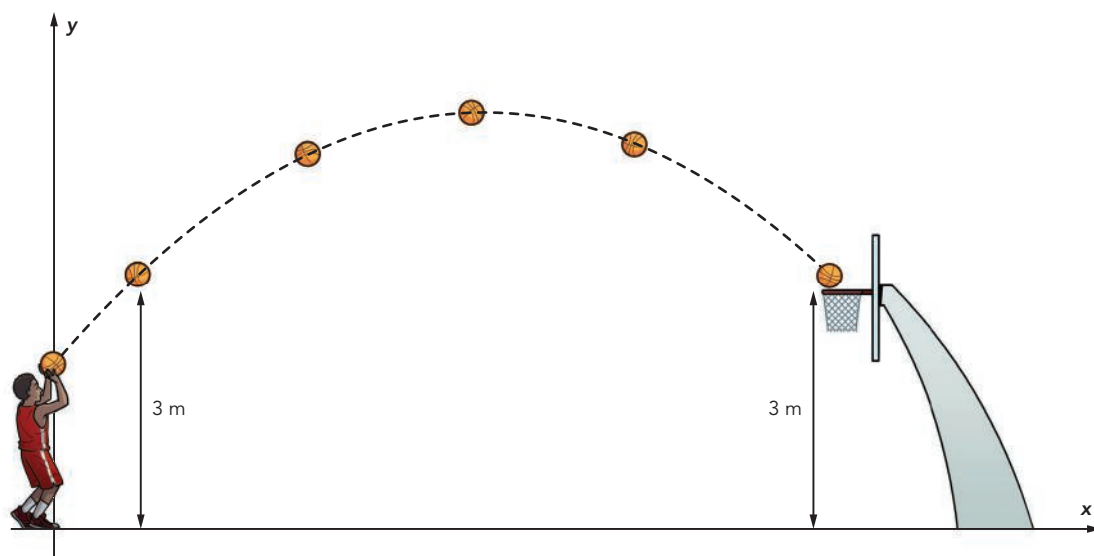
Arremesso livre de uma bola de basquete. A foto foi editada digitalmente para mostrar a trajetória da bola.

O arremesso livre envolve conceitos de Ciências da Natureza e Matemática, pois trata-se de um lançamento oblíquo e, para fazer a bola acertar a cesta, é necessário escolher uma inclinação e aplicar a intensidade correta de força. Qualquer variação nessas grandezas altera a trajetória da bola, que não entrará na cesta. Essas decisões devem ser tomadas em frações de segundo pelos atletas. Para isso, é necessário treinar muito – ou, no caso do CUE3, ter uma inteligência artificial que as calcule.

Não escreva
no livro.

Imagine que um jogador faça um arremesso em direção a uma cesta que está a 3 metros de medida de comprimento de altura em relação ao piso da quadra, em que o centro da bola segue uma trajetória plana vertical cuja relação é dada pela lei $y = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x + 2$, com os valores de x e y dados em metros, como mostra a figura a seguir. Nessa relação, y indica a medida de comprimento de altura da bola em relação ao piso da quadra e x indica a medida de distância horizontal da bola em relação ao eixo vertical no qual está posicionado o jogador.

Nessa situação, a trajetória descrita pela lei é parte de uma curva chamada **parábola**.



Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

Para analisar a trajetória da bola, podemos posicioná-la no eixo y de um plano cartesiano antes do arremesso, conforme a figura acima.

- Quando a bola estava posicionada para o arremesso, qual era o valor da abscissa x da posição da bola? $x = 0$
- A que medida de comprimento de altura do solo estava a bola nesse momento?
- Determine a medida de comprimento de altura em que estava a bola quando a medida de distância horizontal dela até o jogador era de 2 metros. 2 m
Aproximadamente 3,71 m.
- Qual é a medida de distância horizontal da bola, em relação ao jogador, quando a bola está a 3 metros de medida de comprimento de altura? $1\text{ m na subida e }7\text{ m na descida da bola.}$
- Considere que a bola acerta a cesta na descida da trajetória e que, quando se acerta um arremesso a mais de 6,75 m de medida de distância da cesta, esse arremesso vale 3 pontos. De uma medida de distância menor, o arremesso certo vale 2. Se o jogador acertou o arremesso na situação do item anterior, então quantos pontos ele conseguiu com essa cesta? 3 pontos

CONHEÇA O CAPÍTULO

Objetivos

- Investigar diferentes situações reais que podem ser modeladas por funções quadráticas.
- Construir modelos utilizando funções quadráticas para resolver problemas em diferentes contextos.
- Explorar a ideia de função quadrática e algumas propriedades dela.
- Conhecer como o estudo de funções quadráticas se iniciou por meio da história da Matemática.
- Utilizar tecnologias digitais para explorar e analisar os zeros de funções quadráticas.
- Utilizar o conceito de raízes de equações de 2º grau para construir modelos e resolver problemas.
- Construir um fluxograma para modelar uma situação e indicar a solução para o problema.
- Investigar diferentes situações reais analisando gráficos de funções quadráticas no plano cartesiano.
- Explorar a parábola e as propriedades geométricas dela.
- Construir, explorar e analisar o gráfico de funções quadráticas, utilizando ou não tecnologias digitais.
- Explorar a relação entre parábolas e catenárias no contexto artístico.
- Converter representações algébricas de funções quadráticas em representações gráficas e vice-versa.
- Analisar funções quadráticas em que uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra.
- Investigar os coeficientes a , b e c e o discriminante Δ .
- Compreender o que é vértice da parábola e investigar ponto de máximo ou de mínimo de funções quadráticas.

Justificativa

Assim como com funções afins, o trabalho com funções quadráticas – em especial o cálculo dos zeros e dos pontos de máximo e de mínimo – é frequente em diversos contextos da Matemática financeira, das Ciências da Natureza, das Ciências Humanas e de outras situações do cotidiano.

Portanto, ao ter as funções quadráticas como um dos pontos de aquisição de habilidades e competências algébricas, os estudantes têm a oportunidade de melhor compreender e analisar diversos fenômenos, permitindo que ajam de maneira mais consciente nessas situações.

Para essa aquisição de fato ocorrer, é necessária a compreensão dos significados atribuídos às funções quadráticas e às representações gráficas dessas funções, além da compreensão do papel dos coeficientes da equação relacionada a uma função quadrática.

A BNCC

No decorrer do capítulo, favorecemos o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica, bem como das competências específicas e das habilidades de Matemática e suas Tecnologias e de outras áreas do conhecimento indicadas a seguir. Também estão indicados os temas contemporâneos transversais presentes no capítulo.

Competências gerais: CG01, CG02, CG03, CG05.

Competências específicas de Matemática e suas

Tecnologias: CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05.

Competências específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias: CECNT01, CECNT02.

Habilidades de Matemática e suas Tecnologias:

EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT402, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT506.

Habilidades de outras áreas do conhecimento:

EM13LGG602, EM13LGG701, EM13CNT107, EM13CNT202, EM13CNT204, EM13CNT308, EM13CHS106.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia;
- Diversidade Cultural;
- Processo de Envelhecimento, Respeito e Valorização do idoso;
- Saúde.

A função quadrática

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste tópico encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação 1

Não escreva no livro.

Preço de venda de um bolo

Uma doceria quer dar um desconto no preço dos bolos. Para isso, decide fazer um teste para observar como ocorre o rendimento. O dono da loja percebe que, vendendo o bolo a 60 reais, ele geralmente vende, por dia, 12 bolos. A cada 5 reais de desconto que ele dá por bolo, ele passa a vender mais 2 bolos por dia.

Além disso, ele sabe que ao multiplicar a quantidade de bolos vendidos pelo preço de venda, o resultado é o valor total arrecadado nas vendas, e que não vale a pena vender o bolo por menos de R\$ 10,00.

- a) Com um colega, copie e complete a tabela a seguir no caderno e faça algumas simulações de quanto a doceria iria faturar a cada 5 reais de desconto dado no preço do bolo: 5 reais, 10 reais, 15 reais, 20 reais, e assim sucessivamente.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Receita em função do desconto no preço do bolo

Desconto (em R\$)	Preço do bolo (em R\$)	Quantidade de bolos vendidos	Receita (em R\$)
0,00	60,00	$12 + 0 = 12$	$12 \cdot 60 = 720,00$
5,00	55,00	$12 + 2 = 14$	$14 \cdot 55 = 770,00$
10,00	50,00	$12 + 4 = 16$	$16 \cdot 50 = 800,00$
15,00			
20,00			
25,00			
30,00			
40,00			
50,00			
5x	$60 - 5x$	$12 + 2x$	

Tabela elaborada para fins didáticos.

rocharibeiro/Shutterstock



Em docerias e em outros empreendimentos, a definição do preço de venda ideal de um produto para maximizar lucros envolve vários conhecimentos algébricos.

- b) O que vocês podem notar sobre o crescimento da receita (valor recebido) conforme o aumento do desconto por bolo? *Até um desconto de R\$ 15,00, conforme o desconto aumenta, a receita também aumenta. A partir de R\$ 15,00, quanto mais o desconto aumenta, mais a receita diminui.*
- c) Existe uma receita máxima nessa simulação? Se sim, qual é o valor dela? *Sim. R\$ 810,00.*
- d) Qual é a expressão algébrica que fornece a receita para x descontos de R\$ 5,00 sobre o preço de venda do bolo? *$-10x^2 + 60x + 720$*

Situação 2

Não escreva no livro.

Cerca para cavalos

Um fazendeiro deseja construir um cercado em forma de retângulo para colocar cavalos. Ele dispõe de 200 metros de cerca e deseja utilizar toda a cerca, portanto, a medida de perímetro do cercado deverá ser 200 metros. Além disso, ele deseja que a medida de área cercada seja a maior possível. Então, ele analisa algumas possibilidades.

- **1ª opção:** Construir uma área retangular com 2 lados com medidas de comprimento iguais a 10 m e 2 lados com medidas de comprimento iguais a 90 m.
- **2ª opção:** Construir uma área retangular com 2 lados com medidas de comprimento iguais a 20 m e 2 lados com medidas de comprimento iguais a 80 m.
- **3ª opção:** Construir uma área retangular com 2 lados com medidas de comprimento iguais a 30 m e 2 lados com medidas de comprimento iguais a 70 m.

- a) Qual opção apresentada proporciona a maior medida de área? Qual é a medida dessa área?
A 3ª opção. $2\,100\text{ m}^2$.
- b) Existe algum par de medidas de comprimento dos lados do cercado tal que a medida de área seja máxima? Para responder a essa questão, faça no caderno testes com alguns pares possíveis, além das opções dadas. Quanto mede essa área máxima?
Sim. No cercado com lados de medidas de comprimento de 50 m e 50 m. A medida de área máxima é $2\,500\text{ m}^2$.
- c) Qual é o formato do cercado quando ele tem área máxima? Quadrado.



Cavalo em fazenda. O cálculo de medidas de área é importante na determinação do espaço necessário para melhor circulação e vivência de animais criados em fazendas.

Karina ka fotos/Shutterstock

Natchapon Srihon/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção

Situação 3

Preço da gasolina

Um posto de combustível, no qual o preço do litro da gasolina é R\$ 4,00, costuma vender 10 000 litros de gasolina por dia. Diante das variações econômicas do país, o posto precisará aumentar o preço do litro da gasolina, mas sabe que, para cada 1 centavo de aumento, o posto vende 100 litros a menos por dia. Ao analisar o caso, o setor financeiro observa que o valor total recebido com as vendas da gasolina em função do aumento no preço do litro, em centavos, corresponde a uma função obtida pelo produto do preço do litro e a quantidade de litros vendidos.

- a) Qual expressão indica o preço do litro? $4 + 0,01x$
- b) Qual expressão indica a quantidade de litros vendidos por dia? $10000 - 100x$
- c) Escreva no caderno a lei da função que indica o valor total recebido com as vendas por dia nesse posto.
 $f(x) = -x^2 - 300x + 40000$

A flutuação dos preços em postos de combustível reflete não só a busca por valores que aumentem o lucro, como também as variações de preço da matéria-prima dos combustíveis, como cana-de-açúcar e petróleo.

Explorando a ideia de função quadrática

Você já viu, no Ensino Fundamental, que o número d de diagonais em um polígono convexo depende do número n de lados desse polígono. Vamos relembrar.

Fique atento

A diagonal de um polígono convexo é um segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos do polígono.

3. Não. Espera-se que os estudantes respondam que o produto $n \cdot (n - 3)$ fornece o dobro do número de diagonais do polígono, pois, nesse cálculo, cada diagonal está sendo considerada 2 vezes. Por isso, a expressão correta para obter o número de diagonais de um polígono de n lados é

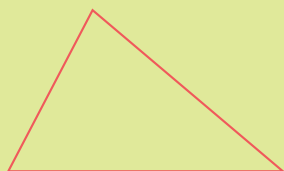
$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Não escreva no livro.

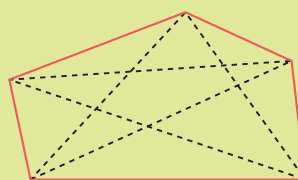
Explore para descobrir

1. Quantas diagonais tem:

a) um triângulo? **Nenhuma.**

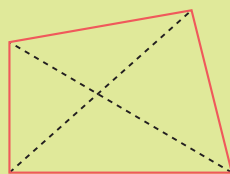


c) um pentágono? **5 diagonais.**

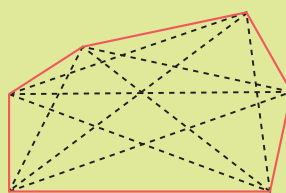


Ilustrações: Banco de imagens/
Arquivo da editora

b) um quadrilátero? **2 diagonais.**



d) um hexágono? **9 diagonais.**



2. Quantas diagonais partem de cada vértice de:

a) um triângulo? **Nenhuma.**

b) um quadrilátero? **1 diagonal.**

c) um pentágono? **2 diagonais.**

d) um hexágono? **3 diagonais.**

e) um polígono convexo de n lados? **$(n - 3)$ diagonais.**

3. Em um polígono convexo de n lados, se multiplicarmos o número de vértices pelo número de diagonais que partem de cada vértice, obteremos o número de diagonais desse polígono? Se sim, justifique. Caso contrário, indique como obter a expressão correta da função d que expressa o número d de diagonais em função de n .

4. Teste a expressão obtida na atividade anterior com os valores obtidos na atividade 1 e, observando os valores de $d(3)$, $d(4)$, $d(5)$ e $d(6)$, responda: a função d é afim? Por quê? **$d(3) = 0$, $d(4) = 2$, $d(5) = 5$ e $d(6) = 9$. Professor, espera-se que o estudante perceba que, como $d(n)$ não tem uma variação linear, d não é uma função afim.**

A expressão que relaciona o número d de diagonais em um polígono convexo em função do número n de lados desse polígono é a lei de uma **função quadrática** dada por:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2}, \text{ sendo } n \text{ um número natural maior do que ou igual a } 3.$$

Fique atento

Neste caso, o domínio da função é $D(d) = \{n \in \mathbb{N}; n \geq 3\}$.

As situações apresentadas nas páginas 78 e 79 também são modeladas por funções quadráticas, assunto que você estudará ao longo deste capítulo.

Formalizando o conceito de função quadrática

Definição de função quadrática

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **função quadrática**, ou **função polinomial de 2º grau**, quando existem três números reais a , b , c , com $a \neq 0$, tal que

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Escrevemos:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

Lembre-se de que podemos facilitar a escrita de $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ escrevendo que a função f é dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$. Mas sempre atentos para não confundir a função $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ com o número real $f(x)$, que é o valor assumido pela função no ponto x .

Análise alguns exemplos de funções quadráticas ou polinomiais de 2º grau. Os números reais a , b e c são chamados de **coeficientes** da função.

a) $f(x) = -x^2 + 100x$, em que $a = -1$, $b = 100$ e $c = 0$.

b) $f(x) = 3,5x^2 - 2x + 1$, em que $a = 3,5$, $b = -2$ e $c = 1$.

c) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$, em que $a = -4$, $b = 4$ e $c = -1$.

d) $f(x) = x^2 - \pi$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -\pi$.

e) $f(x) = \frac{13}{20}x^2$, em que $a = \frac{13}{20}$, $b = 0$ e $c = 0$.

Observe algumas funções que **não** são quadráticas.

f) $f(x) = 2x$

g) $f(x) = 2^x$

h) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

Reflita

Por que a função quadrática também recebe o nome de função polinomial de 2º grau?

Devido ao expoente 2 do x , ou seja, x está elevado ao quadrado.

Porque não podem ser escritas na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \neq 0.$$

Professor, não é necessário que os estudantes identifiquem o tipo de função representada nesses exemplos de funções que não são quadráticas, porém pode ser que alguns deles o façam. Nesses exemplos, a função do exemplo **f** é afim, a do exemplo **g** é exponencial e a do exemplo **h** é polinomial de 3º grau.

Reflita

Por que as funções dos exemplos **f**, **g** e **h** não são quadráticas?

Atividades

Não escreva no livro.

1. Escreva no caderno três exemplos de função quadrática, indicando os valores dos coeficientes a , b e c .

Resposta pessoal.

2. Quais das seguintes funções são quadráticas?

As dos itens **a** e **d**.

a) $f(x) = 2x^2$

c) $f(x) = x(x-1)(x-2)$

b) $f(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = 3x(x-1)$

3. Para quais valores de t as seguintes funções são quadráticas? **a)** Para t real e diferente de zero.

a) $f(x) = tx^2 + 2x + 5$

b) $f(x) = -5x^t + 2x + 5$

Para $t = 2$.

4. As leis das funções a seguir podem ser escritas na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determine, em cada uma delas, os valores de a , b e c .

a) $f(x) = 2x^2$ $a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$.

b) $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ $a = 2$, $b = -12$ e $c = 23$.

c) $f(x) = (x+2)(x-3)$ $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$.

d) $f(x) = (4x+7)(3x-2)$ $a = 12$, $b = 13$ e $c = -14$.

e) $f(x) = (2x+3)(5x-1)$ $a = 10$, $b = 13$ e $c = -3$.

Valor ou imagem da função quadrática em um ponto

Se a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, duas situações são importantes.

- Dado um valor $x_0 \in \mathbb{R}$, calcular $f(x_0)$.

Por exemplo, se $f(x) = x^2 - 5x + 6$, para calcular o valor dessa função no ponto $x = 4$, ou seja, $f(4)$, fazemos $f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$. Logo, $f(4) = 2$.

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$

Portanto 2 e 3 são raízes da equação.

Refleta //

Verifique, por meio de substituição, se 2 e 3 são raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

- Obter o valor $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

Se $f(x) = x^2 - 5x + 6$, para obtermos $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, precisamos resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$, que é um tipo de equação que será estudada neste capítulo. Os valores que satisfazem essa equação são chamados de **zeros** da função f ou **raízes** dessa equação.

6. a) $A(10) = 100$; $A(1,5) = 2,25$; $A(2\sqrt{3}) = 12$.

Atividades

Não escreva no livro.

5. Para cada item a seguir, copie a tabela no caderno e preencha-a com o valor da função quadrática f fornecida para cada valor de x .

a) $f(x) = -2x^2$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

b) $f(x) = 3x^2 - 5x$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

6. Quando variamos a medida de comprimento ℓ do lado de uma região quadrada, a medida de área também varia. Essa relação pode ser expressa pela função A descrita pela lei $A(\ell) = \ell^2$.

a) Calcule $A(10)$, $A(1,5)$ e $A(2\sqrt{3})$.

b) Calcule ℓ tal que $A(\ell) = 256$. $\ell = 16$

7. Um programa de computador foi programado para indicar a medida de área de um círculo de acordo com o seguinte algoritmo.

Início

Nomeie de r a medida de comprimento do raio
Crie R
Calcule $R \leftarrow r \cdot r$
Crie A
Calcule $A \leftarrow \pi \cdot R$
Saída: A

Fim

Fique atento

Lembre-se de que a seta $\leftarrow$ indica que uma variável do algoritmo vai receber um valor (um número explicitado no algoritmo, o valor de outra variável ou o resultado de um cálculo). Por exemplo, em $R \leftarrow r \cdot r$, a variável R do algoritmo recebe o valor do cálculo $r \cdot r$.

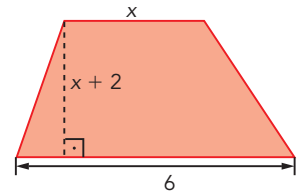
- a) Utilizando o algoritmo, determine a medida de área de um círculo cujo comprimento do raio mede 5 cm . $25\pi \text{ cm}^2$
b) Crie um novo algoritmo em que, sabendo a medida de área de um círculo, obtenha-se como saída a medida de comprimento do raio.
c) Utilizando o algoritmo criado por você no item anterior, determine a medida de comprimento do raio de um círculo cuja área mede $64\pi \text{ m}^2$. 8 m

7. b) A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.

8. A medida de área A de uma região limitada por um trapézio é dada por

$$A = \frac{(B + b)h}{2}, \text{ em que}$$

B e b são, respectivamente, as medidas de comprimento da base maior e da base menor e h é a medida de comprimento da altura. Na região limitada por um trapézio representada acima, a medida de área também pode ser dada em função da medida de comprimento x da base menor por uma lei do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Junte-se a um colega e façam, no caderno, o que é pedido em cada item.



- a) Determine a lei dessa função que indica a medida de área do trapézio de acordo com as informações indicadas na figura. $f(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + 6$

- b) Identifique os coeficientes a , b e c . $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$ e $c = 6$.

- c) Calcule a medida de área dessa região. Não é possível, pois não se sabe o valor de x .

9. Observe o algoritmo a seguir.

Início

Nomeie de x o número conhecido
Crie A
Calcule $A \leftarrow x \cdot x$
Calcule $A \leftarrow A + 2 \cdot x$
Saída: A

Fim

- a) No caderno, construa a tabela com os valores inteiros de x de -3 a 3 e as respectivas saídas A de acordo com o algoritmo. A tabela encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.
b) No algoritmo, observe os passos utilizados para calcular A dado x .

- Primeiro, $A \leftarrow x \cdot x$ indica que A recebeu o valor de x^2 .
- Depois, $A \leftarrow A + 2x$ indica que A recebeu o valor de $A + 2x$, ou seja, recebeu a soma de $2x$ com o valor anterior de A .

Escreva no caderno a lei da função correspondente ao algoritmo. $f(x) = x^2 + 2x$

- c) Escolha outra função quadrática e crie um algoritmo como o anterior. Resposta pessoal.
d) Troque o seu algoritmo com um colega e escreva no caderno a lei da função relacionada ao algoritmo que ele criou. Resposta pessoal.

Leitura e compreensão

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Churrasqueira elétrica

Cada parte da churrasqueira elétrica tem uma funcionalidade.

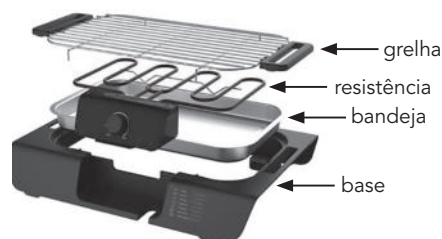
- A base tem a importante função de manter fixas a bandeja e a resistência durante o uso, evitando o aquecimento da superfície na qual o aparelho está apoiado e reduzindo o risco de queimaduras no usuário e de incêndio no local.
- A bandeja serve para coletar a gordura e outros resíduos que caem do alimento quando aquecido. Durante o uso, a bandeja deve conter água, a fim de evitar liberação de fumaça pela queima dos resíduos.
- Na grelha são apoiados os alimentos durante o preparo.
- E, como principal componente de uma churrasqueira elétrica, a resistência tem a função de aquecer os alimentos.

Os resistores têm a função de limitar a intensidade da corrente elétrica em um circuito e, assim, regular a tensão para um valor adequado ao aparelho a ser ligado, evitando que ele queime. Comumente chamados de resistências, os resistores, por esquentarem durante o uso, também receberam a funcionalidade em alguns aparelhos de aquecer o meio no qual eles estão, como em secadores de cabelos, chuveiros elétricos e fornos elétricos.

Esse fenômeno de transformação de energia elétrica em energia térmica é chamado de **efeito Joule**. A elevação da medida de temperatura ocorre com a passagem da corrente elétrica, quando os elétrons colidem com os átomos do condutor e estes passam a vibrar intensamente. A po-

tência elétrica (P), em watt (W), desenvolvida em um aparelho que usa o efeito Joule é dada por $P = \frac{U^2}{R}$, sendo U a tensão elétrica, em volt (V), a que o aparelho é submetido e R a resistência do resistor, em ohm (Ω).

1. Considere a lei $P = \frac{U^2}{R}$ e responda: No caso de um aparelho com resistência constante, como podemos classificar a função que relaciona a potência do aparelho em função da tensão elétrica à qual ele é submetido?
Função quadrática ou função polinomial de 2º grau.
2. Pesquise e responda: Sempre é interessante que o resistor em um aparelho se aqueça? Por quê? Em quais outros aparelhos o resistor é utilizado com a função de aquecer? *A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.*
3. Uma churrasqueira elétrica que não tem variação de resistência foi ligada a uma tomada 110 V e em outra tomada 220 V. Sabendo que o valor da resistência é de 50 Ω , com qual potência ela operou em cada uma das opções? *242 W e 968 W, respectivamente.*
4. Em outro modelo de churrasqueira elétrica, o valor da resistência pode ser alterado para variar a medida de temperatura como o cozinheiro preferir. Supondo que essa variação seja no intervalo de 40 Ω a 80 Ω e que o aparelho seja ligado a uma tomada 110 V, como varia a potência da churrasqueira?
De 151,25 W a 302,5 W.
5. Quais são os benefícios e os malefícios do uso da churrasqueira elétrica? *A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.*



Esse aparelho é composto de uma base, uma bandeja, uma resistência e uma grelha.

As imagens não estão representadas em proporção



Tipos diferentes de resistores enfileirados. Os resistores, comumente chamados de resistência, aquecem quando a corrente elétrica passa por eles.

Sobre o assunto

O texto *Sete aparelhos elétricos com consumo surpreendente de eletricidade – e como reduzi-lo*, disponível em: www.bbc.com/portuguese/curiosidades/2016/04/160428_aparelhos_consumo_eletricidade_fn, acesso em: 5 maio 2020, apresenta o consumo médio estimado, em watts, de alguns eletrodomésticos em comparação ao consumo de lâmpadas de 60 W.

Zeros de uma função quadrática

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste tópico encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Stockbakery/Shutterstock

Situação 1

Não escreva no livro.

Dimensões de um terreno

Um engenheiro precisa saber as medidas de comprimento dos lados e a medida de área de um terreno retangular para iniciar o projeto de uma casa. No momento, as únicas informações que ele tem são:

- o terreno tem 288 m^2 de medida de área;
- a medida de comprimento de um dos lados é o dobro da medida de comprimento do outro.

O engenheiro sabe que, com esses dados, pode encontrar as medidas de comprimento dos lados do terreno.

- Considerando que a medida de comprimento do lado menor desse terreno é x , qual é a lei da função que indica a medida de área? $A(x) = 2x^2$
- Sabendo que a medida de área do terreno é 288 m^2 , qual é a medida de comprimento dos lados? 12 m e 24 m .



O cálculo de medidas de área geralmente é muito importante para a construção civil.

Daxiao Productions/Shutterstock



Ao comprarem tintas para pintar paredes, pintores geralmente estimam a quantidade necessária de tinta de acordo com a medida de área das regiões que serão pintadas.

Demão

Camada de revestimento ou tinta aplicada sobre uma superfície.

Situação 2

Pintura de uma parede

Uma lata de tinta de 10 L consegue pintar uma **de-mão** de uma região com medida de área de aproximadamente 90 m^2 . Imagine que se queira passar duas demãos dessa tinta em uma parede retangular, e sabe-se que a medida de comprimento da largura do muro é 5 vezes a medida de comprimento da altura dele.

- Sabendo que a medida de comprimento da altura da parede é x , qual é a medida de comprimento da largura? $5x$
- Escreva a lei da função que indica a medida de área da parede. $A(x) = 5x^2$
- Qual é a medida de área total a ser pintada considerando as duas demãos de tinta? $10x^2$
- Sabendo que foram gastos 10 L de tinta para pintar essa parede, quais são as medidas de comprimento das dimensões dela? 3 m e 15 m .

Situação 3

Venda em brechó

Você já viu como funcionam campanhas de brechó? São vendas de roupas, sapatos, bolsas ou outros artigos usados, mas em boas condições, por um preço inferior ao desses mesmos artigos novos.

Para planejar um brechó, uma comunidade resolveu adotar a seguinte estratégia para o preço dos produtos: o comprador paga, para cada peça escolhida, o valor de 30 reais menos um valor, em reais, numericamente igual à quantidade de peças que estiver levando. A estratégia foi pensada considerando que o custo de cada produto é zero, de maneira que o lucro é obtido multiplicando a quantidade de itens e o preço deles. Porém, era preciso analisar se em alguma situação não haveria lucro.

- Considere x a quantidade de itens vendidos para uma pessoa. Escreva no caderno a expressão que indica o preço de cada peça. $30 - x$
- Junte-se a um colega e escrevam no caderno a lei da função que expressa o lucro L da venda de x itens para um cliente. $L(x) = x(30 - x)$
- Qual é a quantidade de itens que, se for vendida, não gera lucro? $x = 0$ ou $x = 30$.



Um brechó é um empreendimento feito para negociar roupas e objetos usados, que pode ter como objetivo arrecadar dinheiro para ajudar projetos sociais ou gerar lucro para os proprietários.

Samuel Maciel/Shutterstock

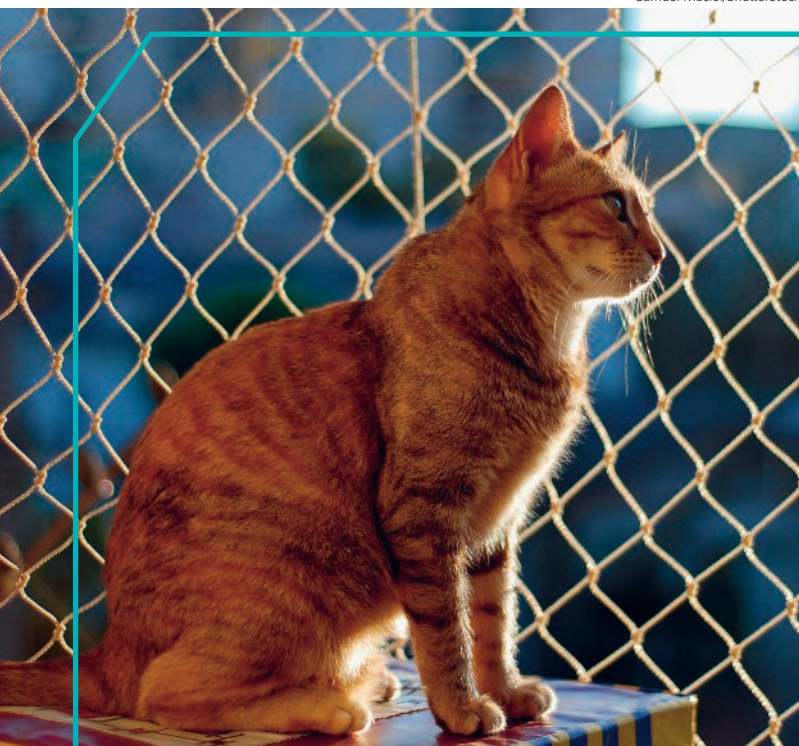
As imagens não estão representadas em proporção

Situação 4

Tela de proteção de uma janela

Considere que uma tela de proteção precisa ser colocada em uma janela retangular cuja área mede $2,64 \text{ m}^2$. É preciso, ainda, conhecer as medidas de comprimento dos lados da janela, mas o que se sabe é que a medida de comprimento da largura corresponde ao dobro da medida de comprimento da altura acrescida de $0,2 \text{ m}$.

- Sabendo que a medida de comprimento da altura da janela é x , escreva no caderno a expressão que indica a medida de comprimento da largura. $2x + 0,2$
- Escreva no caderno a lei da função que indica a medida de área da janela. $A(x) = 2x^2 + 0,2x$
- Utilize as informações dos itens anteriores para escrever a equação que permite calcular o valor de x . $2x^2 + 0,2x = 2,64$



Telas de proteção em janelas são comumente usadas para impedir acidentes com crianças ou animais de estimação em apartamentos e casas.

Explorando as raízes de uma equação de 2º grau

Em muitas situações modeladas por funções quadráticas, como as das páginas 84 e 85, é comum precisarmos recorrer a equações de 2º grau para resolvê-las. Essas equações são da forma $y = ax^2 + bx + c$, em que os coeficientes a , b e c são números reais, com $a \neq 0$; c é chamado de termo independente da equação, pois é o termo que não é multiplicado por x ou x^2 .

Antes de fazer o estudo dos zeros das funções quadráticas, vamos conhecer a origem histórica das equações de 2º grau.

Muito do que conhecemos da Matemática desenvolvida pelos antigos babilônios provém da análise de tabletes de argilas feitos por eles. Entre esses documentos históricos está, por exemplo, o tablete Plimpton 322, que foi produzido entre os anos 1900 a.C. e 1600 a.C.

Além do Plimpton 322, outros tabletes babilônios foram descobertos por pesquisadores e, em alguns deles, foram encontrados problemas que, se traduzidos para termos matemáticos atuais, são equivalentes a equações de 2º grau. Acredita-se que esses problemas tinham como objetivo descobrir medidas de comprimento de figuras geométricas.

Resolva a atividade a seguir, relacionada aos métodos matemáticos usados pelos babilônios. Depois vamos aprender maneiras mais simples de obter as raízes de equações de 2º grau.



Foto do tablete Plimpton 322. Apesar de atualmente sabermos traduzir os números expressos nesse tablete, que estão dispostos como em uma tabela, ainda há várias teorias sobre o propósito desses valores.

agefotostock/Alamy/Fotografia

Atividades

Não escreva no livro.

10. Vamos adaptar as ideias utilizadas pelos babilônios para a linguagem atual, de modo a obter a raiz real positiva da equação de 2º grau $x \cdot (x + 1) = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6$, que representa o cálculo da medida de área da região retangular a seguir.



Banco de Imagens/arquivo da editora

- a) Siga os passos indicados para obter a raiz real positiva.

1º passo: Calcule metade do coeficiente de x na equação dada. $\frac{1}{2}$

2º passo: Eleve o valor obtido ao quadrado. $\frac{1}{4}$

3º passo: Multiplique o 2º membro da equação $x^2 + x = 6$ pelo coeficiente de x^2 ; depois adicione esse produto ao resultado do passo anterior. $\frac{25}{4}$

4º passo: Calcule a raiz quadrada do valor obtido no passo anterior. $\frac{5}{2}$

5º passo: Do resultado do passo anterior, subtraia metade do coeficiente de x . 2

6º passo: Divida o valor obtido no passo anterior pelo coeficiente de x^2 . 2

7º passo: Verifique que o resultado obtido no 6º passo é o valor de x^2 . $2^2 + 2 = 6$

- b) Repita os passos anteriores para obter uma raiz real positiva para a equação $x^2 + 8x = 105$. $x = 7$

Fonte de consulta: ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Cálculo das raízes de uma equação de 2º grau no GeoGebra

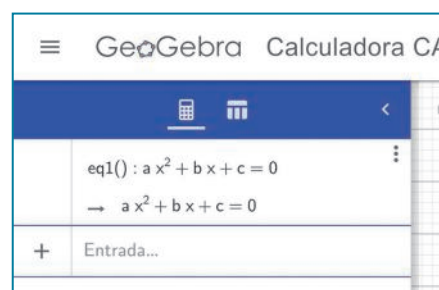
Vamos utilizar o GeoGebra Calculadora CAS para analisar a fórmula que calcula as raízes de uma equação de 2º grau, que pode ser associada a uma função quadrática. Você pode usar a versão *on-line*, disponível em <https://www.geogebra.org/?lang=pt>. Acesso em: 5 maio 2020.

Vamos resolver a equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Para isso, siga os passos abaixo.

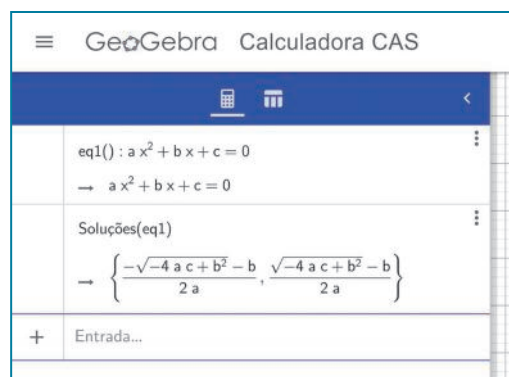
1º passo: Na tela inicial da versão *on-line*, na lista "Powerful Math Apps", clique em "Calculadora CAS". Deve abrir uma nova janela.

2º passo: Na primeira linha do campo Entrada, escreva a equação de 2º grau na forma geral. Para isso, digite **eq1: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$** e tecele "Enter". Observe que "^" indica a operação de potenciação e "*" indica a operação de multiplicação.

3º passo: Na segunda linha do campo Entrada, digite **Soluções(eq1)** e tecele "Enter". Dessa maneira, o GeoGebra apresenta duas raízes possíveis, que geralmente chamamos de x_1 e x_2 .



Detalhe da tela do GeoGebra após o 2º passo.



Detalhe da tela do GeoGebra após o 3º passo.

- Responda às perguntas a seguir, considerando a equação $ax^2 + bx + c = 0$.
 - O valor do coeficiente a em uma equação de 2º grau pode ser igual a zero? Por quê? Não. Se $a = 0$, deixaríamos de ter uma equação de 2º grau.
 - Observe o termo dentro da raiz quadrada nas raízes da equação apresentadas pelo GeoGebra. A equação tem raízes reais para quaisquer valores de a , b e c ? Justifique.
- Salve sua construção, abra um novo documento, repita os passos no GeoGebra e indique no caderno quais são as raízes da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$. $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$.
- Quais são as raízes apresentadas pelo GeoGebra para a equação $x^2 + 1 = 0$? Justifique esse resultado de acordo com sua resposta ao item **b** da questão 1.

O GeoGebra indica que essa equação não tem raiz real. Isso ocorre porque, para essa equação, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$, temos $b^2 - 4ac = -4 < 0$. Dessa maneira, a equação não tem raízes reais.

1. b) Não. Caso o termo $b^2 - 4ac$ seja negativo, a expressão $\sqrt{b^2 - 4ac}$ não estaria definida e, por isso, não haveria raízes reais para a equação.

Formalizando o conceito de zeros de uma função quadrática

O valor de x para o qual a função quadrática dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, é chamado **zero** da função quadrática. Assim, para determinar o zero de uma função quadrática, basta determinar as **raízes** da equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

A seguir vamos apresentar algumas maneiras de determinar as raízes de uma equação de 2º grau.

Determinação das raízes de uma equação de 2º grau

Analizando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

3º passo: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

Explore para descobrir

5º passo: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

Não escreva no livro.

Para resolver uma equação, podemos isolar o x em um dos membros. Vejamos como resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Siga os passos para encontrar uma fórmula que indica o valor de x .

1º passo: Deixe os termos que têm x no primeiro membro e o restante no segundo membro da equação. $ax^2 + bx = -c$

2º passo: Divida todos os termos da equação pelo coeficiente a . $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

3º passo: Divida $\frac{b}{a}$ por 2 e eleve o resultado ao quadrado para descobrir o valor a ser somado aos dois membros da equação.

4º passo: Some o valor obtido no passo anterior aos dois membros da equação. $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

5º passo: Fatore o lado esquerdo da equação utilizando o trinômio do quadrado perfeito.

6º passo: Some as frações que estão no segundo membro da equação utilizando o mmc. $-\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

7º passo: Extraia a raiz quadrada nos dois membros da equação.

8º passo: Isole x no primeiro membro da equação. $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

9º passo: Considerando $\Delta = b^2 - 4ac$, faça essa substituição e reescreva a equação. $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

A fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, que você obteve no *Explore para descobrir*, pode ser utilizada para calcular as raízes de equações de 2º grau. O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado **discriminante** da equação relacionada à função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ele tem um papel muito importante na determinação das raízes da equação.

7º passo: $\pm \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Fique atento

O valor do discriminante (Δ) de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, influencia na quantidade de raízes da equação e, consequentemente, na quantidade dos zeros da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Quando $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais diferentes (consequentemente, a função f tem dois zeros reais diferentes) dadas por: $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Quando $\Delta = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais iguais (consequentemente, a função f tem dois zeros reais iguais) dadas por: $x' = x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a}$
- Quando $\Delta < 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raízes reais (consequentemente, a função f não tem zeros reais).

Existe uma relação entre os coeficientes da equação de 2º grau e a soma e o produto das raízes dessa equação.

Existindo raízes reais tais que $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, obtemos:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b + \sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Logo, $x' + x'' = \frac{-b}{a}$, ou seja, a soma das raízes é igual a $\frac{-b}{a}$.

Além disso:

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Logo, $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$, ou seja, o produto das raízes é igual a $\frac{c}{a}$.

Fatorando o trinômio $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

Quando $\Delta \geq 0$, ou seja, quando a equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais x' e x'' , iguais ou diferentes, podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] =$$

$$= a[x^2 - x'x - x''x + x'x''] = a(x - x')(x - x'')$$

Logo: $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$ é a forma fatorada do trinômio de 2º grau.

Fique atento

Fatorar um polinômio é expressá-lo em forma de produto.

Por completamento de quadrado

Analise alguns exemplos.

a) $x^2 + 6x = 0$

Podemos adicionar elementos aos dois membros da equação para fatorar utilizando o trinômio quadrado perfeito.

$$x^2 + 6x + 3^2 = 0 + 3^2$$

Podemos fatorar o primeiro membro da equação.

$$\underbrace{x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2}_{(x+3)^2} = 9 \Rightarrow (x+3)^2 = 9$$

$$\text{Logo, } x^2 + 6x = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 9$$

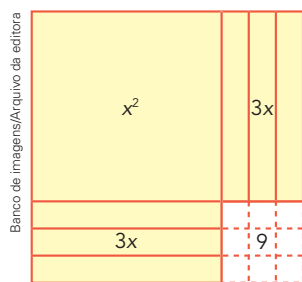
A partir daí, podemos resolver a equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros.

$$(x+3)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{9} \Rightarrow (x+3) = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 3 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ x+3 = -3 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

Raízes da equação: 0 e -6.

Representação geométrica

Podemos construir a região quadrada que ilustra essa situação.



Faltam 9 regiões quadradas de lado com medida de comprimento 1. Por isso, somamos 9 nos dois membros para "completar o quadrado".

Fique atento

O completamento de quadrado utiliza a forma fatorada do trinômio quadrado perfeito: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

A região quadrada de lado com medida de comprimento x representa o x^2 .
As seis regiões retangulares com lados de medidas de comprimento x e 1 representam $6x$.

As nove regiões quadradas de lado com medida de comprimento 1 representam 9.

Verificação:

$$x^2 + 6x = 0$$

$$\text{Para } x = 0, \text{ temos: } (0)^2 + 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\text{Para } x = -6, \text{ temos: } (-6)^2 + 6 \cdot (-6) = 0 \Rightarrow 36 - 36 = 0$$

b) $x^2 - 10x = 0$

$$\text{Completando o quadrado, temos: } x^2 - 10x + 5^2 = 0 + 5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2}_{(x-5)^2} = 5^2 \Rightarrow (x-5)^2 = 25$$

$$\text{Assim: } x^2 - 10x = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = 25$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros:

$$x - 5 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 5 \Rightarrow x = 10 \\ \text{ou} \\ x - 5 = -5 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Raízes da equação: 0 e 10.

c) $x^2 + 6x + 5 = 0$

$$\text{Completando o quadrado, temos: } x^2 + 6x + 9 - 5 = 0 + 9 \Rightarrow (x+3)^2 - 5 = 9 \Rightarrow (x+3)^2 = 14$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros:

$$x + 3 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1 \\ \text{ou} \\ x + 3 = -2 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$

Raízes da equação: -1 e -5.

d) $x^2 - \frac{5}{2}x = 0$

Completando o quadrado, temos:

$$x^2 - \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros:

$$x - \frac{5}{4} = \pm \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{10}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ \text{ou} \\ x - \frac{5}{4} = -\frac{5}{4} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Raízes da equação: $\frac{5}{2}$ e 0.

Fique atento

Adicionar o mesmo número nos dois membros de uma equação não altera a relação de igualdade.

e) $4x^2 + 16x + 7 = 0$

Organizando a equação: $4(x^2 + 4x) + 7 = 0$

Completando o quadrado, temos: $4(x^2 + 4x + 4 - 4) + 7 = 0 \Rightarrow 4[(x + 2)^2 - 4] + 7 = 0$

Organizando a equação: $4(x + 2)^2 - 16 + 7 = 0 \Rightarrow 4(x + 2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = \frac{9}{4}$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros: $x + 2 = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x + 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \end{cases}$

Raízes da equação: $-\frac{7}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

De modo geral, ao fazer o completamento de quadrado temos que:

$$x^2 + px = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} = 0$$

Atividades resolvidas

1. Determine, se existirem, as raízes da equação de 2º grau em cada item, usando o cálculo do discriminante.

a) $x^2 - 12x + 35 = 0$

b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

Resolução

a) $x^2 - 12x + 35 = 0$

$a = 1, b = -12$ e $c = 35$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35 =$
 $= 144 - 140 = 4$

$\Delta = 4 > 0$ (há 2 raízes reais e diferentes)

$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + \sqrt{4}}{2} = \frac{12 + 2}{2} = 7$

$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 - \sqrt{4}}{2} = \frac{12 - 2}{2} = 5$

Logo, as raízes da equação $x^2 - 12x + 35 = 0$ são 7 e 5.

b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$a = 2, b = -3$ e $c = 5$.

$\Delta = b^2 - 4ac =$
 $= (-3)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (5) = 9 - 40 =$
 $= -31 (\Delta < 0)$

Logo, a equação não tem raízes reais.

2. Determine, se existirem, as raízes da equação de 2º grau $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Resolução

Usando a relação da soma e do produto dos zeros de uma equação de 2º grau, podemos tentar encontrar dois números cuja soma seja 7 (oposto de -7) e cujo produto seja 12.

As possibilidades de produto de dois números inteiros iguais a 12 são:

$1 \cdot 12 = 12$

$2 \cdot 6 = 12$

$3 \cdot 4 = 12$

$(-1) \cdot (-12) = 12$

$(-2) \cdot (-6) = 12$

$(-3) \cdot (-4) = 12$

Vejamos quais dessas possibilidades têm números cuja soma seja 7.

$1 + 12 = 13$

$2 + 6 = 8$

$3 + 4 = 7$

$(-1) + (-12) = -13$

$(-2) + (-6) = -8$

$(-3) + (-4) = -7$

Assim, temos: $(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x' = 3$ e $x'' = 4$

Raízes da equação: 3 e 4.

Verificação:

$x^2 - 7x + 12 = 0$

Para $x = 3$: $3^2 - 7 \cdot 3 + 12 \Rightarrow 9 - 21 + 12 = 0$

Para $x = 4$: $4^2 - 7 \cdot 4 + 12 \Rightarrow 16 - 28 + 12 = 0$

Fique atento

Essa estratégia de obtenção das raízes da equação de 2º grau é interessante quando $a = 1$ e é possível encontrar facilmente dois números cuja soma e produto correspondam aos coeficientes da equação, como mostrado na resolução. Caso contrário, é possível usar outras estratégias de determinação dos zeros da função quadrática.

3. Determinem, se existirem, as raízes da equação de 2º grau $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

Resolução

Podemos dividir todos os termos por 2:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x = -\frac{3}{2}$$

Completando o quadrado, temos:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{25}{16} \Rightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{5}{4} = \pm \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Raízes da equação: $\frac{3}{2}$ e 1.

Verificação:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\text{Se } x = \left(\frac{3}{2}\right): 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right) \frac{9}{2} - \frac{15}{2} + 3 = 0$$

$$\text{Se } x = 1: 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow 2 - 5 + 3 = 0$$

4. Determine, se existirem, os zeros da função quadrática dada pela lei $f(x) = x^2 - 10x + 25$.

Resolução

Para determinar os zeros da função f , basta determinar as raízes da equação $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Sabemos que: $a = 1$, $b = -10$ e $c = 25$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$$

Se $\Delta = 0$, então há duas raízes reais iguais.

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{0}}{2} = \frac{10 + 0}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{0}}{2} = \frac{10 - 0}{2} = 5$$

Logo, os zeros da função dada por $f(x) = x^2 - 10x + 25$ são 5 e 5, ou seja, $f(5) = 0$.

Atividades

Não escreva no livro.

11. Determine, se existirem, os zeros das funções quadráticas calculando o Δ em cada caso.

a) $f(x) = x^2 - 3x$ **3 e 0.**

b) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ **Não tem zeros reais.**

c) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ **-2 e 4.**

d) $f(x) = x^2 + 10x + 25$ **-5**

e) $f(x) = x^2 - 8x + 16$ **4**

f) $f(x) = 25x^2 + 9x + 1$ **Não tem zeros reais.**

12. (Ifsul-RS) As medidas do comprimento e da altura (em metros) do *outdoor* retangular, representado na figura abaixo, são exatamente as soluções da equação $x^2 - 10x + 21 = 0$.



Reprodução/IF SUL, 2017.

Dessa forma, é correto afirmar que a área desse *outdoor* é: **Alternativa c.**

a) 10 m^2 . b) 20 m^2 . c) 21 m^2 . d) 24 m^2 .

13. (FGV-RJ) Na resolução de um problema que recaía em uma equação do 2º grau, um aluno errou apenas o termo independente da equação e encontrou como raízes os números 2 e -14. Outro aluno, na resolução do mesmo problema, errou apenas o coeficiente do termo de primeiro grau e encontrou como raízes os números 2 e 16.

As raízes da equação correta eram: **Alternativa b.**

a) -2 e -14. d) -2 e -16.

b) -4 e -8. e) 4 e 14.

c) -2 e -16.

14. (Acafe-SC) Uma biblioteca possui 300 livros, todos do mesmo tamanho. Um funcionário pretende dividi-los igualmente entre as prateleiras da loja. Sabendo que, se os livros forem igualmente divididos entre 3 prateleiras a menos, cada prateleira receberá 5 livros a mais do que o previsto inicialmente.

Assim, o número de prateleiras para colocar todos os livros é: **Alternativa b.**

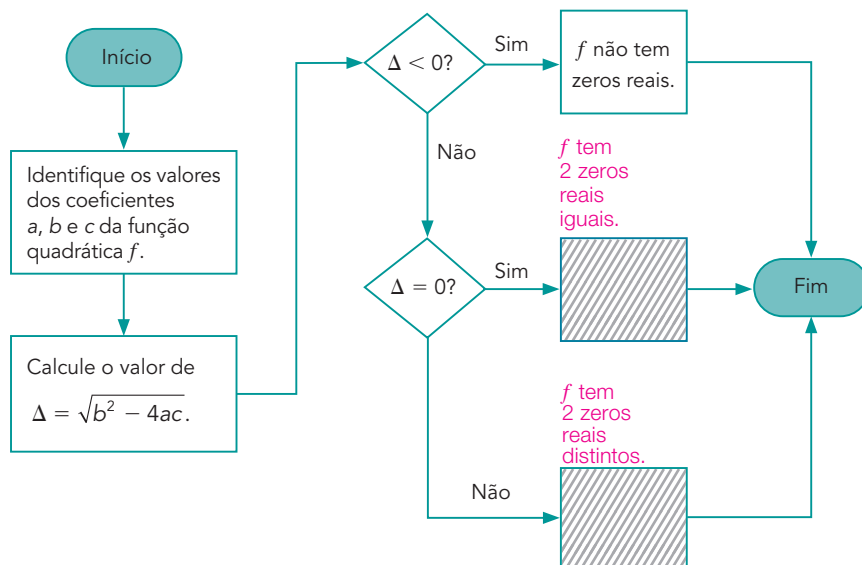
a) múltiplo de 4.

c) entre 10 e 12.

b) múltiplo de 3.

d) maior que 20.

15. Fluxogramas também podem ser usados para melhor compreender processos matemáticos. O fluxograma a seguir indica como calcular o valor do discriminante e descobrir quantos zeros reais uma função quadrática f qualquer tem.



Banco de imagens/arquivo da editora

Junte-se a um colega e respondam aos itens a seguir sobre esse fluxograma.

- a) Considerando esse fluxograma, qual é a primeira ação a ser realizada para descobrir quantos zeros tem uma função quadrática f ? E depois disso? *Identifique os valores dos coeficientes a , b e c da função quadrática f . Calcule o valor de Δ .*
- b) Em um fluxograma, um símbolo com forma de losango sinaliza uma etapa de decisão: a resposta à pergunta feita nessa etapa indica qual dos "caminhos" deve ser tomado no fluxograma. Nesse fluxograma, existe alguma etapa de decisão? Se sim, qual é a pergunta feita nela e quais são as respostas possíveis a ela? *Sim. Pergunta: " $\Delta < 0$?" e " $\Delta = 0$?". As respostas possíveis são "sim" e "não" em ambos os casos.*
- c) Utilizem uma régua para reproduzir o fluxograma no caderno. Em seguida, de acordo com o que vocês já sabem sobre os zeros de funções quadráticas, preencham as etapas hachuradas.
16. No caderno, faça o completamento de quadrado de cada equação de 2º grau.
- a) $x^2 - 2x = 0$ $(x - 1)^2 - 1 = 0$ b) $x^2 + 6x - 16 = 0$ $(x + 3)^2 - 25 = 0$
17. Usando o completamento de quadrado, determine os zeros das funções quadráticas dadas.
- a) $f(x) = x^2 + 10x + 21$ -3 e -7 . b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 3 e -1 .
18. Determinem, se existirem, os zeros das funções quadráticas dadas por:
- a) $f(x) = (x - 2)^2 - 9$; -1 e 5 . b) $f(x) = -(x + 1)^2 + 4$. -3 e 1 .
19. A função f , dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem os coeficientes $a = 1$ e $b = 6$.
- a) Quais são os zeros dessa função? *Não é possível definir.*
- b) Para qual valor de c essa função tem $x = 2$ como um dos zeros da função? $c = -16$
- c) Considerando o coeficiente c obtido no item anterior, indique a lei de f . Essa função tem outro zero? Se sim, indique-o no caderno. $f(x) = x^2 + 6x + 16$. $x_2 = -8$.
20. Para qualquer x real, o quadrado de x é sempre um número maior do que ou igual a zero. Pensando nisso, junte-se a um colega e determinem o menor valor que a função definida por $f(x) = 2(x - 1)^2 + 10$ pode assumir para todo $x \in \mathbb{R}$. 10
21. Qual é o maior valor que a função definida por $f(x) = -3x^2 - x + 1$ pode assumir para qualquer $x \in \mathbb{R}$? (Dica: Complete quadrados.) $\frac{13}{12}$

22. O departamento de contabilidade de uma empresa constatou que, no mês de setembro de 2019, a receita da empresa, em milhares de reais, era dada por $R(d) = -d^2 + 52d + 660$, em que d é o dia do mês em setembro. Já a despesa, no dia d do mês de setembro, e em milhares de reais, era dada por $D(d) = 22d + 804$.

- a) Como é possível calcular o lucro da empresa em um dia d de setembro de 2019, utilizando a receita e a despesa desse dia? $L(d) = R(d) - D(d)$
- b) Em quais dias desse mês a empresa não teve lucro nem prejuízo? 6 e 24 de setembro.

23. Na Física, chamamos de movimento uniformemente variado (MUV) o movimento cuja velocidade aumenta ou diminui de maneira constante a cada unidade de intervalo de tempo quando o movimento é retilíneo. Em geral, as equações que descrevem a posição do objeto estão relacionadas com a medida de intervalo de tempo de deslocamento até determinado momento.

De acordo com isso, um perito, ao analisar um acidente, concluiu que um dos veículos envolvidos na colisão, cuja medida de velocidade inicial era de 72 km/h (ou 20 m/s), precisaria ter freado por 100 metros para que não houvesse a batida. Além disso, durante a frenagem, o sistema de freios aplica uma desaceleração de 2 m/s^2 .

De posse dessas informações, o perito concluiu que a medida de intervalo de tempo de frenagem t para que não houvesse a colisão, em segundos, pode ser calculada por meio da equação $147 = 2t^2 - 40t + 347$. Por quantos segundos o carro deveria ter freado para não colidir com o outro? Alternativa d.

- a) 1 segundo. d) 10 segundos.
- b) 5 segundos. e) 15 segundos.
- c) 8 segundos.

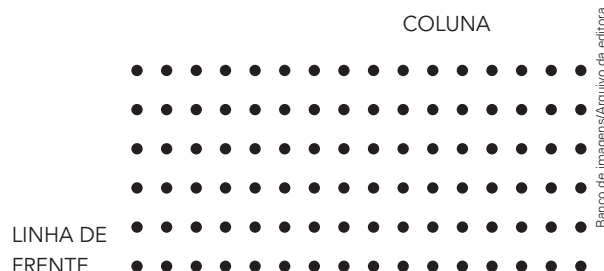
24. Pesquise em livros ou na internet como funciona a equação do movimento uniformemente variado (MUV).

- a) Escreva no caderno a equação do movimento uniformemente variado, em que a distância percorrida é dada em função da medida de velocidade inicial, da medida de intervalo de tempo e da medida de aceleração. Indique o que significa cada variável.
- b) Analise as informações indicadas no texto da atividade anterior sobre o acidente e tente indicar como o perito obteve a lei da função f em relação a t , usando a equação do MUV. $100 = 20t - t^2 \Rightarrow 147 = 2t^2 - 40t + 347$
- c) Crie uma situação de frenagem de veículos que seja possível associar a uma função polinomial de 2° grau. Depois, troque com um colega para que ele escreva a lei da função. Não se esqueça de montar o gabarito com a resposta correta para que o colega consiga conferir depois. Resposta pessoal.

25. A Batalha de Termópilas (480 a.C.) foi um importante conflito entre 300 espartanos, liderados pelo rei Leônidas, e 300 000 persas, liderados pelo rei Xerxes. Os persas tinham o objetivo de dominar a Grécia, passando por um estreito desfiladeiro chamado Termópilas. Na tentativa de deter a invasão persa, os espartanos acabaram derrotados devido a traição de um pastor de ovelhas que revelou uma passagem escondida, mas não antes de conseguir impedir a passagem dos homens de Xerxes durante três longos dias de luta.

Fontes de consulta: SOUSA, Rainer Gonçalves. Batalha de Termópilas. *História do mundo*. Disponível em: <https://www.historiadomundo.com.br/grega/batalha-de-termopilas.htm>; VILELA, Túlio. Batalha de Termópilas: a verdadeira história dos 300 de Esparta. UOL. Disponível em: <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/historia/batalha-de-termopilas-a-verdadeira-historia-dos-300-de-esparta.htm>. Acesso em: 5 maio 2020.

Em batalhas como essa, era comum que os soldados se dispusessem em filas como na figura a seguir.



Para calcular quantos soldados há nessa formação, basta multiplicar o número de soldados de cada linha pelo número de soldados de cada coluna. Suponha que os 300 soldados espartanos tenham se organizado dessa maneira em algum momento da batalha e que o número de soldados em cada coluna excedia o número de soldados em cada linha em 13 unidades. Quantos soldados estavam na linha de frente nessa ocasião?

Alternativa b.

- a) 10 d) 20
- b) 12 e) 30
- c) 15

26. Um grupo de amigos resolveu promover um jantar de confraternização. Para isso, fizeram uma pesquisa de preços e acharam razoável a proposta de um dos estabelecimentos. O restaurante cobraria R\$ 420,00 pelo almoço do grupo todo, mas não daria abatimento se algum dos integrantes faltasse. No dia, 3 integrantes faltaram e cada um dos que compareceram teve que pagar R\$ 18,00 a mais. Quantos desses amigos compareceram ao jantar? 4 amigos.

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Analisando os coeficientes de uma equação de 2º grau

Vamos utilizar agora a Calculadora Gráfica para analisar os coeficientes de uma equação de 2º grau na determinação das raízes dessa equação. Você pode usar a versão *on-line*, disponível em: www.geogebra.org (acesso em: 12 jun. 2020).

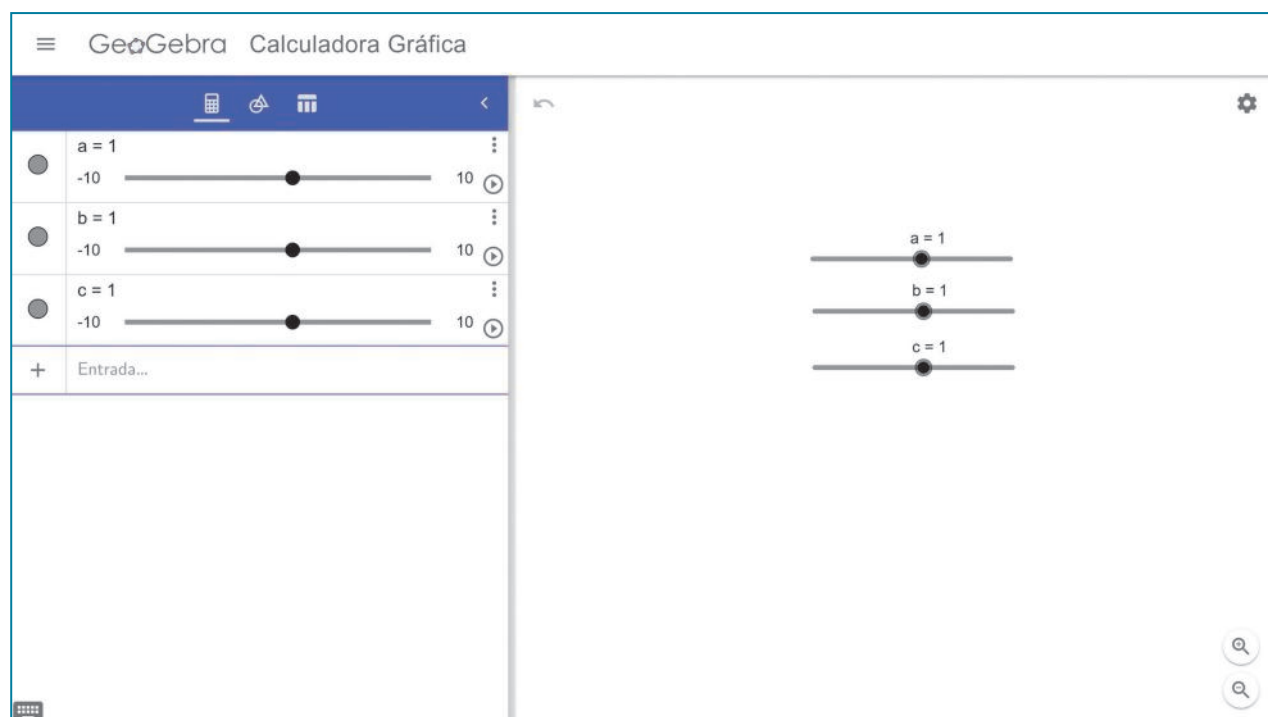
Abra um novo documento e acesse as configurações de exibição (na parte superior direita da tela) e tire as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal.

1º passo: Clique na opção Ferramentas (com ícone de circunferência e triângulo) acima do campo Entrada. Clique na opção de controle deslizante, em seguida, clique no plano cartesiano. Na tela que abrir, digite o nome **a=1** e defina o intervalo do controle para -10 e 10 , o incremento igual a 1 e clique OK. Dessa maneira você vai criar o controle deslizante a , com incremento igual a 1 e intervalo de -10 a 10 .

Fique atento

O incremento indica de quanto em quanto você pode mover o controle deslizante.

Repita o procedimento para criar os controles deslizantes b e c .



Reprodução/www.geogebra.org

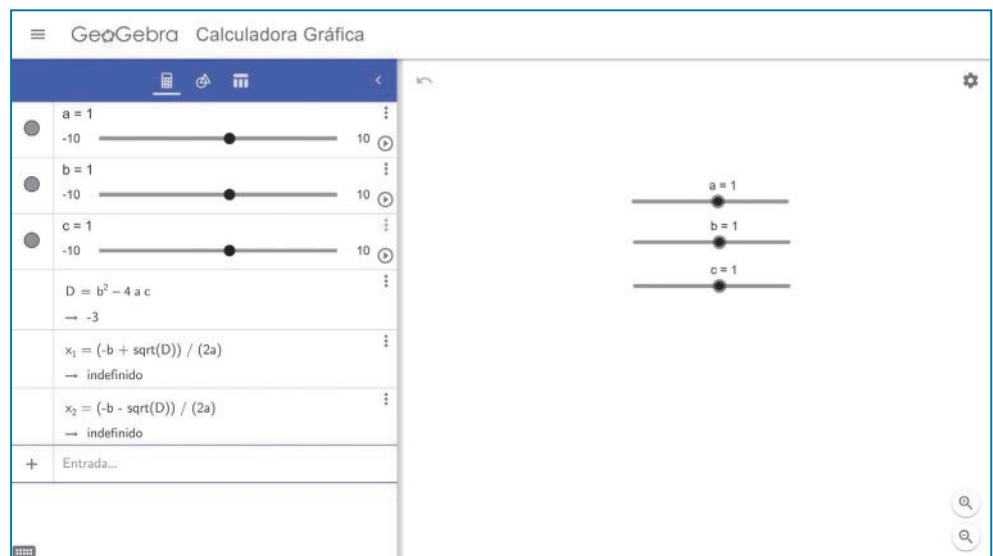
Tela do GeoGebra após o 1º passo.

2º passo: Clique na opção Álgebra (com ícone de calculadora) acima do campo Entrada. No campo Entrada digite: $D=b^2-4*a*c$ e tecla "Enter". Em seguida, digite: $x_1=(-b+sqrt(D))/(2*a)$ e tecla "Enter". Depois digite no próximo campo Entrada $x_2=(-b-sqrt(D))/(2*a)$ e tecla "Enter".

Fique atento

Note que sqrt é a abreviação para *square root*, que significa "raiz quadrada" em inglês.

Essas fórmulas representam os valores do discriminante (D) e da fórmula para resolver a equação de 2º grau e obter as raízes da equação de acordo com os coeficientes a , b e c . Dessa maneira, ao teclar "Enter" após a digitação de cada fórmula, o software calcula e apresenta o valor numérico correspondente aos coeficientes.



Tela do GeoGebra após o 2º passo.

3º passo: Mantenha o controle deslizante $a = 1$ e mova os outros controles deslizantes para $b = -5$ e $c = 4$. Dessa maneira, o software vai calcular o discriminante e as raízes da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$.



Tela do GeoGebra após o 3º passo.

Basta mover os controles deslizantes para obter as soluções de novas equações de 2º grau.

1. Ao final do 2º passo, por que os valores de x_1 e x_2 são indefinidos? **Porque $\Delta < 0$.**
2. Mantendo $a = 1$ e $b = -5$, qual é o menor valor inteiro de c que torna o discriminante negativo? **$c = 7$**
3. Com a fixado em qualquer valor diferente de zero e $c = 0$, o que podemos observar em relação às soluções obtidas? **Uma das soluções (ou x_1 , ou x_2) é zero.**
4. Movendo livremente qualquer controle deslizante, encontre 3 combinações em que o discriminante é igual a zero. **Exemplos de resposta: $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$; $a = 1$, $b = -4$ e $c = 4$; e $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$.**

Análise algébrica e gráfica da função quadrática

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste tópico encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação 1

Não escreva no livro.

Saltos na natureza

Você sabia que muitas espécies de sapos, rãs e pererecas podem, em um único salto, percorrer uma distância com medida muito maior do que a própria medida de comprimento do anfíbio? É o caso da *Acris gryllus*, uma espécie de perereca que tem 4 cm de medida de comprimento, mas alcança uma medida de distância de 40 vezes o próprio comprimento em um único salto! Isso é possível devido a várias características físicas, mas principalmente ao desenvolvimento das pernas.

Fonte de consulta: VASCONCELOS, Yuri. A que distância chega o pulo de um sapo? *Superinteressante*, 4 jul. 2018. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/a-que-distancia-chega-o-pulo-de-um-sapo/>. Acesso em: 30 abr. 2020.

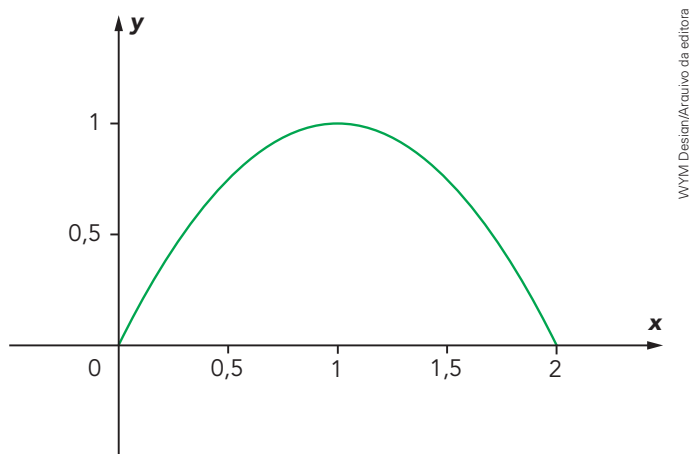
Os saltos desses anfíbios podem ser modelados por **funções quadráticas**. Se pudéssemos desenhar no ar o rastro do salto, veríamos parte de uma **parábola**, que é o nome da representação gráfica dessas funções.

Considere uma rã cujo salto alcança 2 metros de medida de distância. A medida de comprimento da altura máxima que essa rã alcança durante o salto é 1 metro. Observe o gráfico no plano cartesiano que ilustra esse salto.

Fero Bednar/Alamy/Fotoarena



Essa perereca é um anfíbio da espécie *Acris gryllus* e é encontrada apenas na América do Norte.



WYM Design/Arquivo da editora

- Quantos metros a rã avança, na horizontal, até alcançar o ponto mais alto da trajetória? **1 m**
- A lei da função quadrática que modela essa curva é $f(x) = -x^2 + 2x$. Quais são os zeros dessa função? **0 e 2.**
- Compare o resultado obtido no item anterior com o gráfico da função. Você consegue ver alguma relação? **Exemplo de resposta: Os zeros da função são as abscissas dos pontos em que $y = 0$.**

Situação 2

Não escreva no livro.

As parábolas na dança

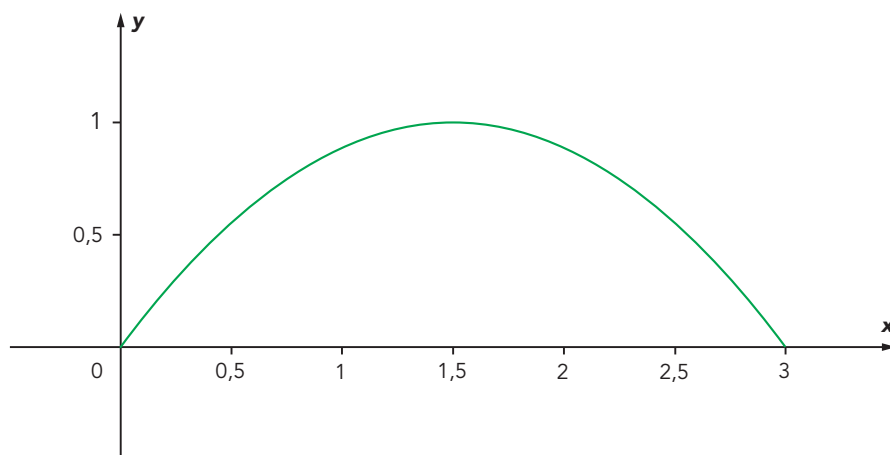
O *ballet* clássico é um estilo de dança que surgiu no século 16, na Itália. Depois ele se desenvolveu também em outros países, como França e Rússia.

O *grand jeté* é um salto em que os bailarinos lançam uma das pernas à frente para saltar. A impressão de quem olha é que o bailarino faz um pequeno voo. Para realizar esse salto, os bailarinos precisam se mover de maneira que o centro do corpo deles se movimente de acordo com uma **parábola**.

Fonte de consulta: COMO surgiu o balé? *Superinteressante*, 4 jul. 2018. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-surgiu-o-bale/>. Acesso em: 30 abr. 2020.



Considere que uma bailarina comece um *grand jeté* no início da sala e avance três metros. No ponto mais alto do salto, a medida de comprimento da altura que o centro dela alcança é 1 metro. O gráfico no plano cartesiano a seguir representa esse salto de uma bailarina.



WWM Design/Arquivo da editora

O *grand jeté* é um salto muito conhecido do *ballet* clássico, em que os bailarinos parecem voar. *Grand* significa "grande" e *jeté* significa "lançamento". O salto recebe esse nome porque ele se inicia com o lançamento da perna no ar.

- Quantos metros ela avança, na horizontal, ao chegar no ponto mais alto do salto? **1,5 m**
- Quais são as coordenadas do ponto mais alto do salto? **(1,5; 1)**
- Quais são as coordenadas do ponto em que a bailarina começa o salto? E do ponto em que ela termina o salto? **(0; 0), (3; 0)**
- Sabendo que a lei da função que representa esse salto é $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, calcule os zeros da função. **0 e 3.**

Gráfico da função quadrática

Explorando o gráfico da função quadrática

Você viu no capítulo anterior que o gráfico de uma função afim, no plano cartesiano, é sempre uma reta. As funções quadráticas, isto é, as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, têm outro tipo de gráfico no plano cartesiano, as parábolas.

Explore para descobrir

Não escreva no livro.

1. Use lápis, régua e uma folha de papel-manteiga ou vegetal para seguir o passo a passo.

1º passo: Construa uma reta r qualquer na folha. Depois indique um ponto F que esteja fora da reta r .

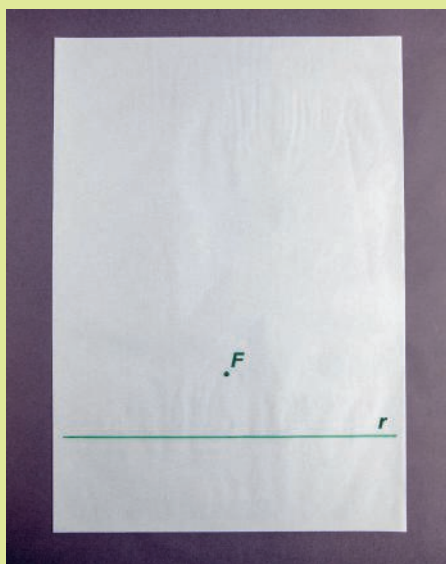
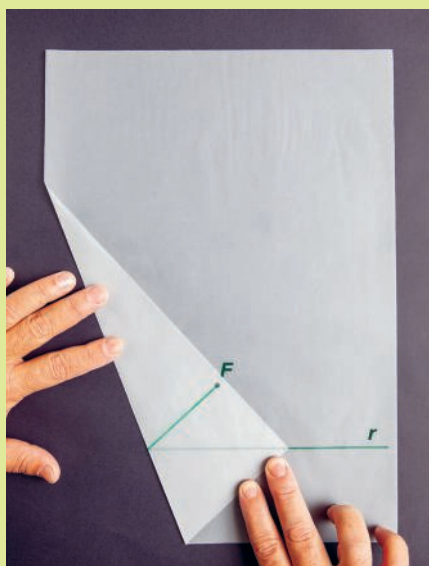


Figura após o 1º passo.

2º passo: Dobre o papel de maneira que um ponto qualquer da reta r fique sobreposto ao ponto F . Marque bem a dobra na folha e desdobre-a em seguida.



Demonstração do 2º passo.

3º passo: Repita o passo anterior 30 vezes, escolhendo novos pontos da reta r para sobreporem o ponto F . Você deve obter uma figura que se aproxima de uma curva.



Doria/Arquivo da editora

Figura após o 3º passo.

- Considerando cada dobra da folha como uma reta, podemos dizer que a curva é formada por 1 ponto de cada uma das retas que você construiu. Utilize uma régua e meça a distância de um desses pontos até o ponto F . Depois meça a distância desse mesmo ponto até a reta r . O que você percebeu?

Resposta esperada: As medidas de comprimento são iguais.

- Repita o processo do item anterior para outros pontos em dobras diferentes. O que você percebeu?

Resposta esperada: Todos os pontos são equidistantes da reta r e do ponto F .

Formalizando o gráfico da função quadrática

A parábola é uma curva formada por todos os pontos equidistantes de um ponto F e de uma reta d , que não contém F . De acordo com essa definição, podemos dizer que a curva que você construiu com as dobras no *Explore para descobrir* é uma parábola.

Fique atento

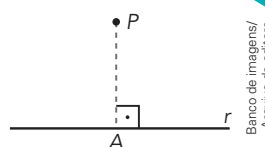
Elementos equidistantes ficam à mesma medida de distância em relação a um referencial.

É possível provar que o gráfico de uma **função quadrática** no plano cartesiano é uma **parábola**. Veremos alguns exemplos mais à frente.

Fique atento

Para determinar a medida de distância de um ponto P a uma reta r , podemos traçar uma reta perpendicular a r , em um ponto A , e que passa pelo ponto P .

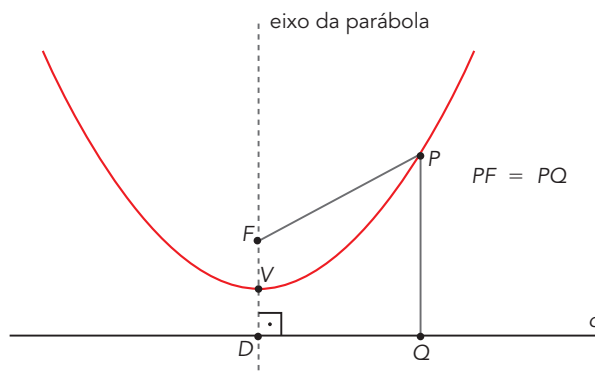
A medida de distância de P a r é igual à medida de comprimento do segmento de reta $\overline{PA}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Na parábola representada ao lado, a **concavidade** é para cima, o ponto F é o **foco** da parábola e d é a **reta diretriz**. A reta perpendicular à diretriz e que contém o foco F é chamada **eixo da parábola**.

O ponto da parábola mais próximo da diretriz é chamado **vértice**. De acordo com a definição de parábola, podemos concluir que o vértice (V) é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são o foco (F) e a intersecção do eixo da parábola com a diretriz (D).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Construção do gráfico de uma função quadrática

Como você viu, em um plano cartesiano, o gráfico de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, é uma parábola. A representação desse gráfico no plano cartesiano pode ser feita com o auxílio de diversos softwares. Vamos utilizar o GeoGebra Calculadora Gráfica. Você pode usar a versão *on-line* disponível em www.geogebra.org/ (acesso em: 12 jun. 2020).

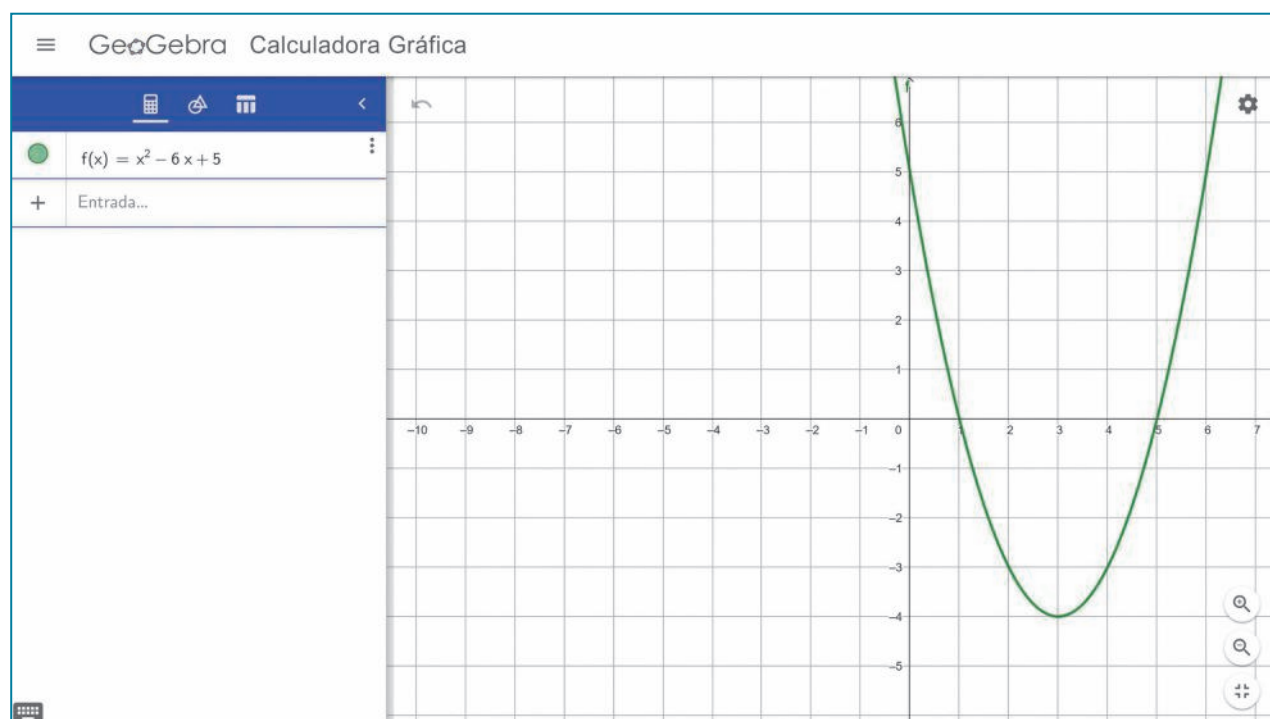
Vamos construir inicialmente o gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e destacar alguns pontos importantes. Para isso, siga os passos a seguir.

1º passo: No campo Entrada de comando digite a lei da função $f(x)=x^2-6x+5$ e tecele "Enter".

2º passo: Acesse as configurações de exibição (na parte superior direita da tela) e selecione as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal. Você deverá ter uma imagem como a apresentada abaixo.

Fique atento

Salve as construções que você fizer.



Tela do GeoGebra após o 1º passo.

Analise com atenção o gráfico (a curva em verde na imagem), observe o comportamento dele e como os valores da função estão dispostos.

3º passo: Agora vamos determinar os zeros da função f . Para isso, digite na segunda linha do campo Entrada **raiz[f]** e tecele "Enter". Veja que foram criados os pontos $A(1, 0)$ e $B(5, 0)$.

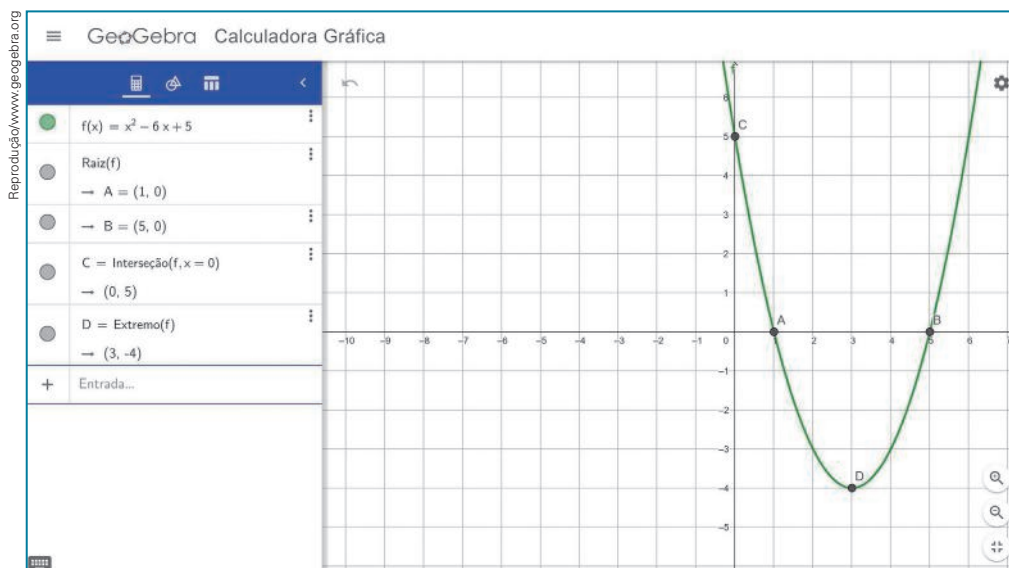
1. Observe a localização dos pontos A e B . O que você pode perceber em relação a eles e ao eixo x ? **Resposta esperada:** Os pontos A e B são a intersecção do gráfico com o eixo x .

Fique atento

Lembre-se de que você pode mover a imagem no GeoGebra clicando em algum ponto da tela e arrastando.

4º passo: Vamos determinar o ponto em que o gráfico intersecta o eixo das ordenadas (eixo y). Para isso, digite na quarta linha do campo Entrada **interseção[f, x=0]** e tecla "Enter". Observe que o ponto de intersecção com eixo y , ponto $C(0, 5)$, tem como ordenada o valor do termo independente c da equação relacionada à função quadrática f .

5º passo: Na quinta linha do campo Entrada, digite **extremo[f]** e tecla "Enter". Veja que foi criado o ponto $D(3, -4)$, que corresponde ao ponto em que o gráfico muda de sentido. Esse ponto é chamado de **vértice da parábola**.



Tela do GeoGebra após o 5º passo.

Fique atento

Em gráficos com a cavidade da curva para cima, como as representações gráficas das páginas 97 e 98, o vértice da função tem a coordenada y como o maior valor da função.

Ao observarmos o gráfico, podemos perceber que o **valor mínimo** dessa função é -4 (a ordenada do vértice). Valor mínimo é o menor valor que uma função pode assumir em todo o domínio dela. Se a concavidade da parábola fosse para baixo, então a ordenada do vértice corresponderia ao valor mínimo que a função pode assumir no domínio.

2. Observe o gráfico da função f no ponto em que $x = 3$.

- a) A função f cresce ou decresce quando x é menor do que 3? **A função é decrescente.**
 b) E para x maior que 3, a função f cresce ou decresce? **A função é crescente.**

3. Depois de salvar sua construção no GeoGebra, abra um novo documento, repita os passos anteriores e construa o gráfico de cada função quadrática dada. *Os gráficos encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.*

- a) $f(x) = 5x^2$ b) $g(x) = x^2 + 2$ c) $h(x) = 2x^2 - 3$ d) $j(x) = 5x^2 + 2x - 8$

Influência dos coeficientes a , b e c e do discriminante Δ em funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$

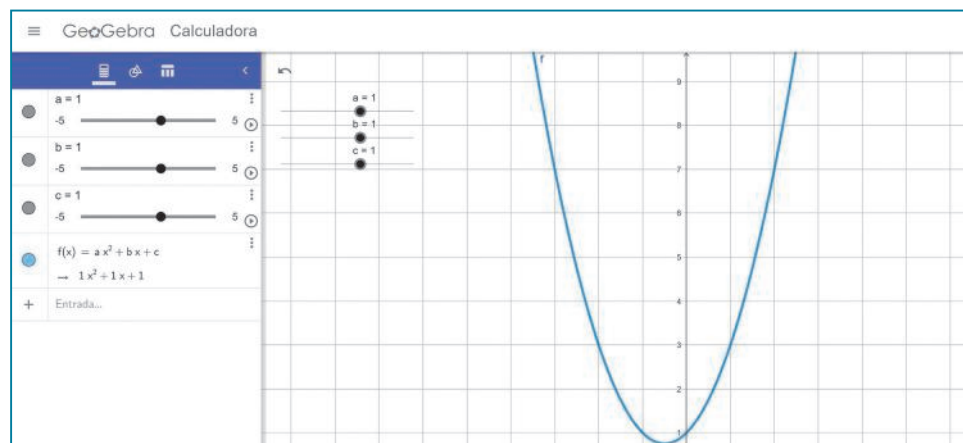
Abra um novo documento no GeoGebra, siga os passos dados e observe a influência dos coeficientes a , b e c e do discriminante Δ no gráfico da função quadrática.

1º passo: Repita os procedimentos anteriores para que os eixos e a malha apareçam na tela. No campo Entrada de comando, digite **a=1** e tecla "Enter". Deve aparecer na tela um controle deslizante com valores entre -5 e 5 . Caso não apareça, clique na bolinha abaixo do campo Entrada e ao lado da indicação do controle.

No campo Entrada, digite os controles deslizantes dos coeficientes **b=1** e **c=1** (a cada controle inserido tecla "Enter").

2º passo: Na quarta linha do campo Entrada de comando, insira a lei da função **$f(x)=a*x^2+b*x+c$** e tecla "Enter".

3º passo: Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do mouse na parábola. Na aba que será apresentada, clique em Configurações. Clique na aba Cor e escolha uma nova cor para o gráfico. Em seguida, clique na aba Estilo e coloque a espessura da linha igual a 7. Feche a janela e observe que o gráfico ficou destacado.



Tela do GeoGebra após o 3º passo.

Reprodução/www.geogebra.org

4. Resposta esperada: A concavidade da parábola se altera. Quando $a > 0$, a concavidade fica para cima; quando $a < 0$ a concavidade fica para baixo. Se $a = 0$, a função deixa de ser quadrática e passa a ser função afim. Quanto maior o valor absoluto de a , menor será a abertura da parábola; quanto menor o valor absoluto de a , maior será a abertura da parábola.

4º passo: Agora vamos observar significados importantes para os coeficientes a , b e c .

4. Altere lentamente apenas o valor do coeficiente a (para isso, basta clicar na bolinha do controle deslizante na tela e arrastar para um dos lados), mantendo os demais coeficientes iguais a 1. Observe o que acontece com o gráfico da função e escreva sua conclusão no caderno.
5. Ajuste novamente o coeficiente $a = 1$, altere lentamente apenas o valor do coeficiente b e observe o que acontece com o gráfico da função. *Resposta esperada: Quando $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y com a parte crescente; quando $b = 0$, o vértice da parábola fica no eixo y ; quando $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y com a parte decrescente.*
6. Agora altere lentamente os valores do coeficiente c , mantendo o coeficiente $b = 1$, e observe o que acontece com o gráfico da função. *Resposta esperada: O coeficiente c é a ordenada do ponto no qual a parábola intersecta o eixo y .*

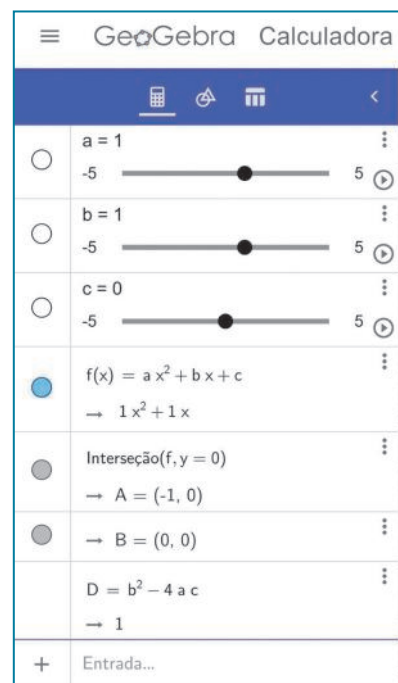
5º passo: Agora vamos observar significados importantes para o discriminante Δ . Ajuste os coeficientes $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0$. Em seguida, no campo Entrada, digite **Interseção [f, y=0]** e tecla "Enter". Vão aparecer na tela 2 pontos, A e B , que são os pontos de intersecção da função f com o eixo x . A abscissa deles indica os zeros dessa função.

6º passo: No campo Entrada digite **$D=b^2-4*a*c$** e tecla "Enter".

O valor indicado por D é o valor do discriminante Δ da equação relacionada à $f(x) = ax^2 + bx + c$.

7. Ajuste os coeficientes $a = 2$, $b = 2$ e $c = 1$. Observe o que acontece com o gráfico da função e com o valor de Δ . *Resposta esperada: Neste caso o gráfico da função intersecta o eixo x em 1 único ponto e $\Delta = 0$.*
8. Altere lentamente os coeficientes a , b e c e procure outras combinações em que $\Delta = 0$. $\Delta = 0$ sempre que $b^2 - 4ac = 0$. Exemplos de resposta: $a = 1, b = 0, c = 0$; $a = 1, b = 4, c = 4$.
9. Altere lentamente o valor dos coeficientes a , b e c , um de cada vez, e observe o que acontece com o gráfico e com o valor do discriminante D . Depois, analise suas respostas das atividades anteriores e tente estabelecer uma relação entre a quantidade de pontos de intersecção do gráfico com o eixo x e o valor do discriminante D da equação correspondente à função.

Resposta esperada: Quando $\Delta = 0$, o gráfico intersecta o eixo x em 1 único ponto; quando $\Delta > 0$, o gráfico intersecta o eixo x em 2 pontos distintos; quando $\Delta < 0$, o gráfico não intersecta o eixo x .



Reprodução/www.geogebra.org

Detalhe da tela do GeoGebra após o 6º passo.

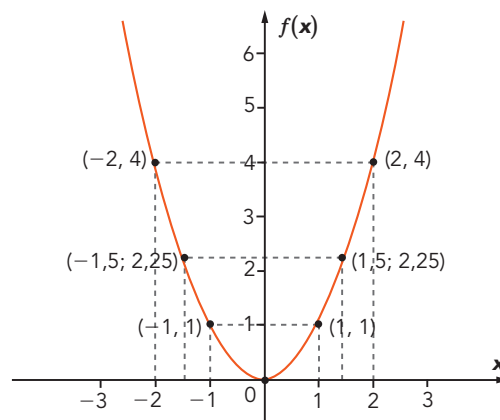
Construção do gráfico de uma função quadrática

Após as explorações que você fez no GeoGebra, vamos ver como construir no plano cartesiano o gráfico de um tipo de função quadrática sem usar *softwares*.

Considere a função f definida pela lei $f(x) = x^2$. Observe a tabela a seguir, na qual são apresentados alguns pontos que pertencem à representação gráfica dessa função.

x	y
-2	4
-1,5	2,25
-1	1
0	0
1	1
1,5	2,25
2	4

Vamos marcar esses pontos em um plano cartesiano para traçar a curva que passa por eles.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Refleta // Os valores da segunda linha representam o quadrado dos valores da primeira linha. Você consegue encontrar alguma relação entre os valores da primeira linha e os valores da segunda linha da tabela?

Essa curva é uma parábola e a função que ela representa é uma função quadrática. Perceba que os valores da segunda linha da tabela correspondem ao quadrado dos respectivos valores da primeira linha, conforme indica a lei da função.

O domínio dessa função é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o conjunto dos números reais y , tal que $y \geq 0$.

Refleta //

Encontre outro ponto que pertença à parábola da função dada pela lei $f(x) = x^2$.

Resposta pessoal.
Exemplos de resposta:
(4, 16); (-3, 9);
(1,2; 1,44).

Características da função definida por $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

Essa função possui algumas características próprias. Vamos explorá-las a seguir.

Explore para descobrir

Não escreva no livro.

- Construa no caderno a tabela com os pontos que pertencem à função definida por $f(x) = ax^2$, para todos os valores inteiros de x no intervalo $[-10, 10]$, considerando $a = 1$. *A tabela está nas Orientações específicas deste Manual.*
 - O que você pode perceber em relação aos valores de y para $x = 2$ e $x = -2$? *São iguais, $y = 4$.*
 - E para os valores de y para $x = 7$ e $x = -7$? *São iguais, $y = 49$.*
- Marque os pontos da tabela que você construiu em um plano cartesiano e trace a curva que representa $f(x) = x^2$. O que você pode perceber em relação aos pontos da curva e ao eixo y ?
O gráfico encontra-se nas Orientações específicas deste Manual. O eixo y é o eixo de simetria da parábola.
- Análise os valores da tabela que você construiu.
 - Considerando o ponto $(1, 1)$, se dobrarmos o valor de x , o que acontece com o valor de y ?
O valor de y é multiplicado por 4.
 - Considerando novamente o ponto $(1, 1)$, se triplicarmos o valor de x , o que acontece com o valor de y ?
O valor de y é multiplicado por 9.
 - Mais uma vez, considerando o ponto $(1, 1)$, se multiplicarmos o valor de x por n , o que acontece com o valor de y ?
O valor de y é multiplicado por n^2 .
- Repita os procedimentos das atividades 1 e 2 para outros valores de a na lei da função f dada por $f(x) = ax^2$.
 - O que você pode concluir?
 - Nessa função, o que é possível dizer sobre $f(x)$ e $f(-x)$ para qualquer x do domínio da função? *$f(x) = f(-x)$*

4. a) Resposta pessoal. Professor, espera-se que os estudantes concluam que, assim como na função dada por $f(x) = x^2$, o eixo y é o eixo de simetria da parábola de qualquer função dada por $f(x) = ax^2$ para qualquer a real não nulo.

A função definida pela lei $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, é uma função quadrática que apresenta as características a seguir.

- A curva é simétrica em relação ao eixo y , que é também eixo de simetria do gráfico da função.

Isso significa que, se o ponto $M(a, b)$ pertence à curva, o mesmo ocorre com o ponto $N(-a, b)$. Podemos dizer que $f(x) = x^2$ é a lei de uma **função par**, isto é, é uma função que tem a propriedade $f(-x) = f(x)$ para qualquer x do domínio.

Note que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Assim, por exemplo, $f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1)$; $f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2)$.

- A variável y é diretamente proporcional ao quadrado da variável x .

Este é o único caso de função quadrática em que ocorre proporcionalidade direta. Veja alguns exemplos a seguir.

a) $f(x) = ax^2$

Se $x = 1$, então $f(1) = a$.

Se multiplicarmos x por n , então $f(xn) = a(xn)^2 = ax^2n^2$.

Neste caso, há proporcionalidade direta.

b) $g(x) = ax^2 + b$

Se $x = 1$, então $g(1) = a + b$.

Se multiplicarmos x por n , então $g(xn) = ax^2n^2 + b$.

Neste caso, não há proporcionalidade direta.

c) $h(x) = x^2 + bx + c$

Se $x = 1$, então $h(1) = 1 + b + c$.

Se multiplicarmos x por n , então $h(xn) = x^2n^2 + xnb + c$.

Neste caso, não há proporcionalidade direta.

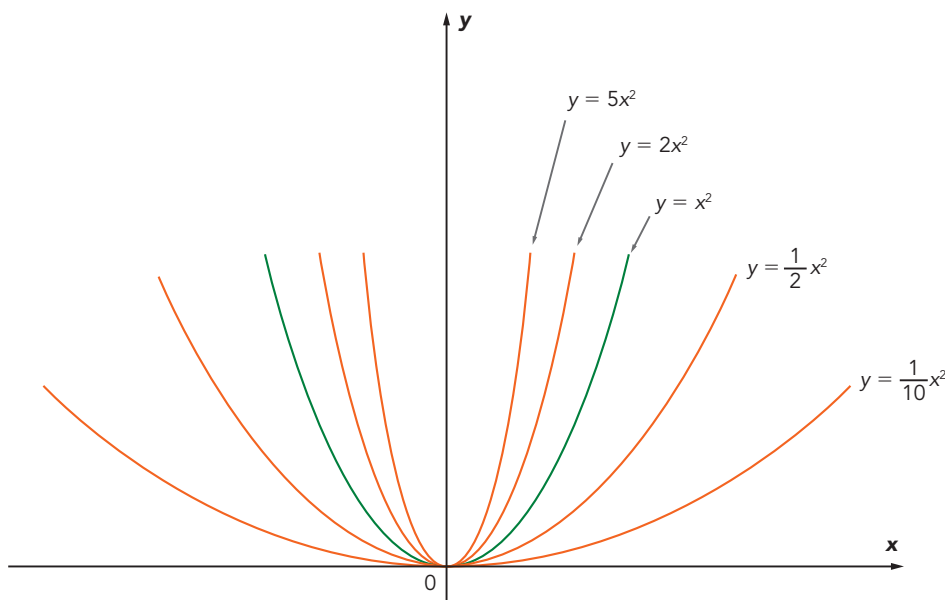
Reflita

Mostre que, para $y = f(x) = ax^2$, y é diretamente proporcional ao quadrado de x .

$$\begin{aligned} f(nx) &= a(nx)^2 = \\ &= a \cdot n^2x^2 = n^2 \cdot ax^2 = \\ &= n^2 \cdot f(x). \end{aligned}$$

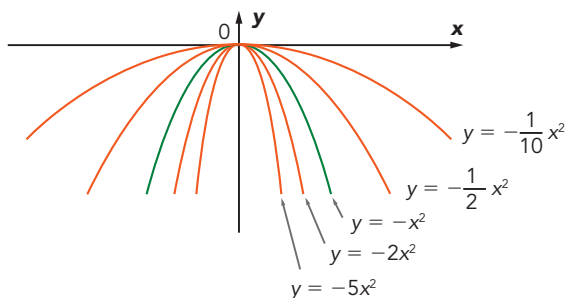
Examine os gráficos da função definida pela lei $f(x) = ax^2$, considerando alguns valores positivos e negativos de a .

- $a > 0$



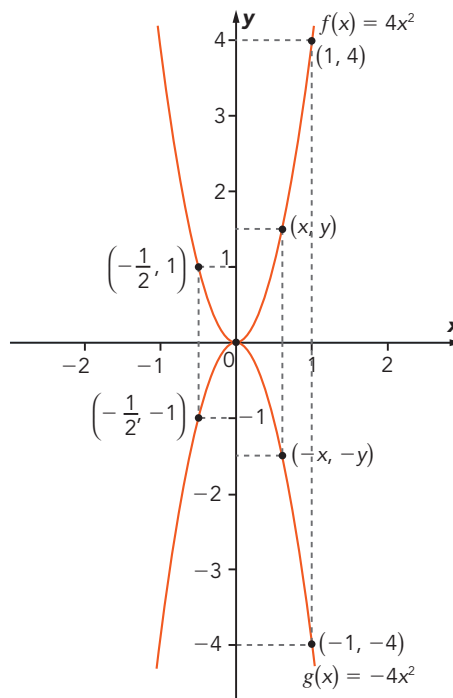
Banco de imagens/Arquivo da editora

- $a < 0$



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Quando $a > 0$, a concavidade está voltada para cima. Nesse caso, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2$ é zero; a função não assume valor máximo, ou seja, ela é ilimitada superiormente.
- Quando $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo. Nesse caso, o maior valor assumido por $f(x) = ax^2$ é zero; a função não assume valor mínimo, ou seja, ela é ilimitada inferiormente.
- Quanto menor o valor absoluto de a , maior será a abertura da parábola.
- Quanto maior o valor absoluto de a , menor será a abertura da parábola.
- Os gráficos das funções quadráticas dadas por $f(x) = ax^2$ e $g(x) = a'x^2$, em que a e a' são números opostos, são simétricos em relação ao eixo x . Há uma reflexão em torno do eixo x , ou seja, uma transformação que leva (x, y) em $(x, -y)$. Veja ao lado os gráficos de $f(x) = 4x^2$ e $g(x) = -4x^2$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

27. b) Não é diretamente proporcional.
27. c) É diretamente proporcional.

Atividades

Não escreva no livro.

27. Para cada função dada, indique no caderno se $y = f(x)$ é diretamente proporcional a x^2 .
 É diretamente proporcional. Não é diretamente proporcional.
 a) $f(x) = 3x^2$ d) $f(x) = (2 + x)x$
 b) $f(x) = 2 + 3x^2$ e) $f(x) = (2 + 5)x^2$
 É diretamente proporcional. Não é diretamente proporcional.
 c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ f) $f(x) = 2x^2 + x + 4$
 Não é diretamente proporcional.
28. Usando régua milimetrada, trace em um plano cartesiano o gráfico de $f(x) = x^2$ e determine os valores $f(x)$ para x igual a $-\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$ e $-\frac{3}{2}$. Depois, verifique esses valores no gráfico.
29. Como seria o gráfico de $f(x) = x^2$ se considerássemos somente os pontos cujas coordenadas são números inteiros?

A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.

30. Crie a lei de uma função f e construa no caderno uma tabela com alguns valores de x e os correspondentes valores de y de acordo com a função. Apresente para um colega apenas a tabela com os valores e peça a ele que descubra a lei da função que você criou. Faça o mesmo com a tabela dele e, em seguida, construa no plano cartesiano o gráfico da função. Resposta pessoal.

31. Use régua milimetrada e trace no caderno o gráfico de cada uma das seguintes funções quadráticas em um mesmo plano cartesiano.

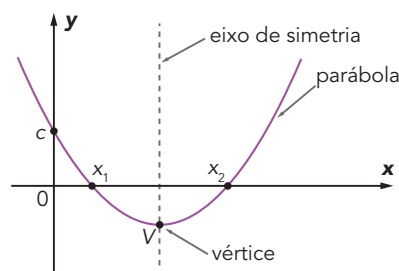
a) $f(x) = 2x^2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
 b) $f(x) = -2x^2$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

Os gráficos encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.

Características da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Agora que já fizemos algumas explorações, vamos compreender as relações que existem entre a lei da função quadrática e o gráfico dela no plano cartesiano.

Você viu na exploração com o GeoGebra que os coeficientes a , b e c e o discriminante Δ influenciam alguns aspectos específicos da representação gráfica da função quadrática, a parábola. Além disso, você viu que o vértice da parábola é o ponto com a maior ordenada (quando a concavidade da parábola é para cima) ou com a menor ordenada (quando a concavidade da parábola é para baixo) da função; ele também é o ponto em que a curva muda de sentido.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

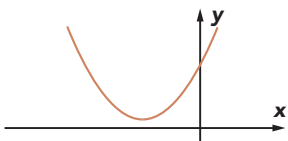
Também dizemos que o vértice da parábola é o **ponto de mínimo** ou o **ponto de máximo** quando a concavidade é para cima ou para baixo, respectivamente. Já a ordenada do vértice é o **valor máximo** ou o **valor mínimo** quando a concavidade é para cima ou para baixo, respectivamente.

Para aprofundar esse estudo, vamos considerar uma função quadrática com a lei do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.

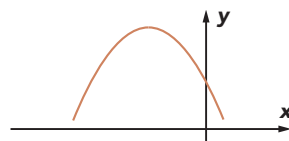
Coefficiente a

O coeficiente a é responsável pela concavidade e pela abertura da parábola.

- Se $a > 0$, a concavidade é para cima.



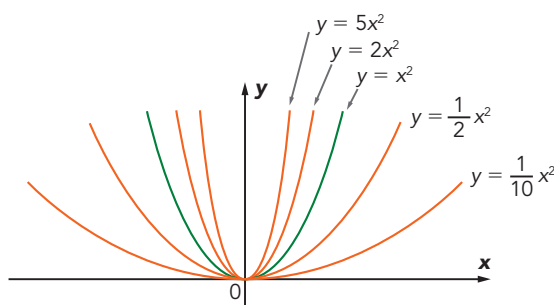
- Se $a < 0$, a concavidade é para baixo.



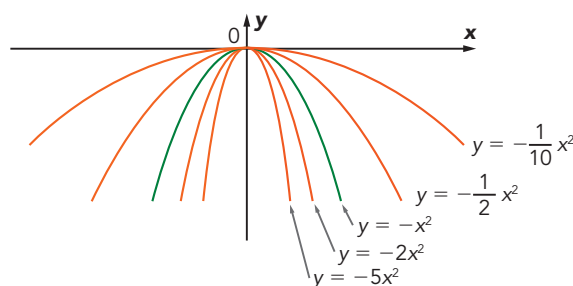
Ilustrações:
Banco de Imagens/
Arquivo da editora

Além disso, quanto maior o valor absoluto de a , menor será a abertura da parábola (parábola mais “fechada”), independentemente de a concavidade ser para cima ou para baixo. Veja alguns exemplos.

- $a > 0$



- $a < 0$



Ilustrações: Banco de Imagens/Arquivo da editora

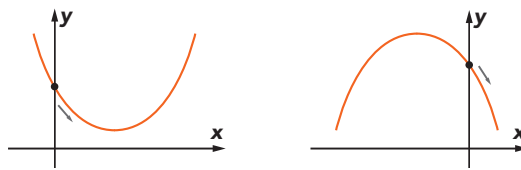
Coefficiente b

O coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo y na parte crescente ou decrescente da parábola.

- Se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y na parte crescente.

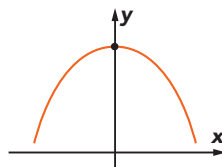
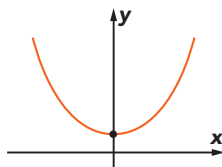


- Se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y na parte decrescente.



Ilustrações:
Banco de Imagens/
Arquivo da editora

- Se $b = 0$, a parábola intersecta o eixo y no vértice.



Ilustrações:
Banco de imagens/
Arquivo da editora

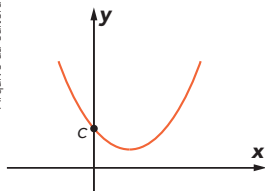
Porque para ser uma função ela precisa ter um único valor de y para cada x do domínio e o domínio da função quadrática é $\mathbb{R}$.

Refleta

Por que a parábola sempre intersecta o eixo y em um só ponto?

Coeficiente c

Banco de imagens/
Arquivo da editora



O coeficiente c indica a ordenada do ponto no qual a parábola intersecta o eixo y .

A parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$, ou seja, $f(0) = c$.

Refleta

Como podemos justificar esse resultado utilizando a lei da função $f(x) = ax^2 + bx + c$?

A curva intersecta o eixo y quando $x = 0 \Rightarrow f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.

0 discriminante Δ

As intersecções da representação gráfica da função quadrática, a parábola, com os eixos coordenados (eixo x e eixo y) são decorrentes das características da lei da função.

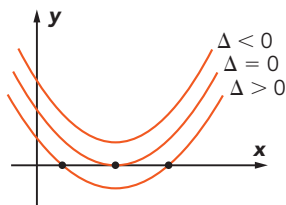
A parábola intersecta o eixo x nos zeros da função. Isso pode ocorrer uma, duas ou nenhuma vez, dependendo do valor do $\Delta = b^2 - 4ac$ da equação correspondente.

Para $f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

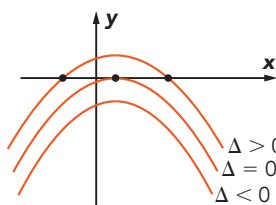
- $\Delta = 0 \rightarrow$ uma raiz real dupla (a parábola intersecta o eixo x em um só ponto)
- $\Delta > 0 \rightarrow$ duas raízes reais diferentes (a parábola intersecta o eixo x em dois pontos distintos)
- $\Delta < 0 \rightarrow$ nenhuma raiz real (a parábola não intersecta o eixo x)

Graficamente, temos:

- $a > 0$



- $a < 0$



Ilustrações:
Banco de imagens/
Arquivo da editora

Fique atento

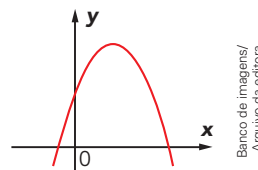
Observe que os zeros de uma função equivalem às raízes da equação correspondente, para $y = 0$.

Atividades resolvidas

5. A função quadrática dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ está representada no plano cartesiano ao lado. Quais são os sinais dos coeficientes a , b e c ?

Resolução

- $a < 0$, pois a concavidade está para baixo.
- $b > 0$, pois a parábola intersecta o eixo y na parte crescente da parábola.
- $c > 0$, pois $f(0) = c$ e a parábola intersecta o eixo y na parte positiva dele.



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Atividades

Não escreva no livro.

32. Verifique quais dos seguintes pontos pertencem à parábola que representa graficamente a função dada pela lei $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Alternativas **a** e **c**.

- a) $A(2, 0)$ b) $B(4, 2)$ c) $C(-1, 12)$

33. Determine o valor de m para que o ponto $A(2, 1)$ pertença à parábola que representa graficamente a função dada por $f(x) = (m + 1)x^2 - 1$. $m = -\frac{1}{2}$

34. a) Eixo x: (5, 0) e (6, 0); eixo y: (0, 30). b) Eixo x: (3, 0) e (-7, 0); eixo y: (0, -21).

c) Eixo x: (6, 0) e (-6, 0); eixo y: (0, -36). d) Eixo x: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; eixo y: (0, 1)

Não escreva no livro.

34. Em que pontos a parábola que representa graficamente cada função a seguir intersecta os eixos x e y?

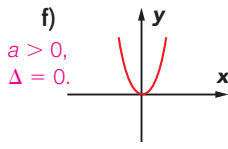
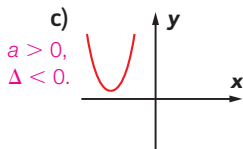
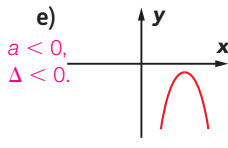
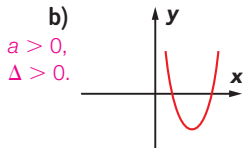
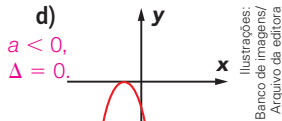
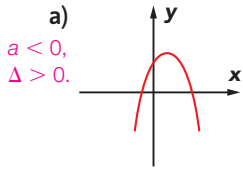
a) $f(x) = x^2 - 11x + 30$

c) $f(x) = x^2 - 36$

b) $f(x) = x^2 + 4x - 21$

d) $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$

35. Em cada gráfico que representa uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, indique se $a < 0$ ou $a > 0$ e descubra se $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ ou $\Delta = 0$.



36. O gráfico a seguir representa graficamente uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Então, podemos afirmar que: **Alternativa b.**

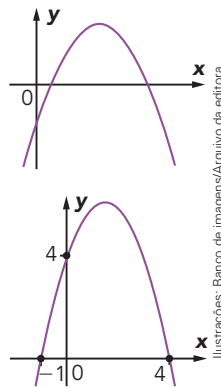
a) $b^2 = 4ac$ e $a > 0$.

b) $b^2 > 4ac$ e $a < 0$.

c) $b^2 < 4ac$ e $a < 0$.

d) $b^2 > 4ac$ e $a > 0$.

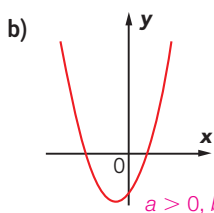
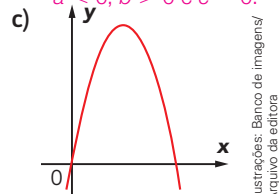
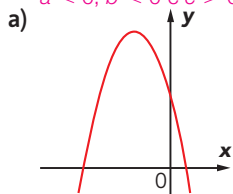
e) $b^2 < 4ac$ e $c > 0$.



37. Escreva no caderno a lei da função correspondente ao gráfico dado, na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$f(x) = -x^2 + 3x + 4$

38. Quais são os sinais de a, b e c em cada função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e representada abaixo?



39. Considere um terreno que tem a forma de um quadrado cujos lados têm medida de comprimento x, em metros. **As respostas encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.**

a) Qual é a lei da função que indica a medida de perímetro desse terreno? Represente o gráfico dessa função no plano cartesiano e indique qual tipo de função é essa.

b) Qual é a lei da função que indica a medida de área desse terreno? Represente o gráfico dessa função no plano cartesiano e indique qual tipo de função é essa.

c) Como varia a medida de perímetro e a medida de área quando dobramos a medida de comprimento x do lado? E quando triplicamos?

d) Como varia a medida de perímetro e a medida de área quando multiplicamos a medida de comprimento x do lado por n?

40. Se o terreno descrito na atividade anterior tivesse a forma de um triângulo equilátero, poderíamos obter funções similares para indicar a variação da medida de perímetro e a variação da medida de área em função da medida de comprimento do lado do terreno?

Refaça os itens da atividade anterior considerando que o terreno tem a forma de um triângulo equilátero. A fórmula que indica a medida de área de uma região

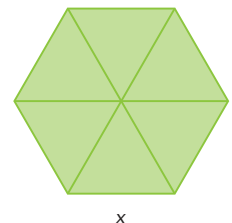
com a forma de um triângulo equilátero é: $A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$, em que ℓ é a medida de comprimento do lado do triângulo. **As respostas encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.**

Sobre o assunto

A fórmula que determina a medida de área de uma região com a forma de um triângulo equilátero pode ser demonstrada utilizando o teorema de Pitágoras, que você estudou no Ensino Fundamental.

Para conhecer mais essa demonstração, sugerimos o site Brasil Escola, disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/area-um-triangulo-equilatero.htm>. Acesso em: maio 2020.

41. Agora considere um terreno que tem a forma de um hexágono regular. Lembre-se de que o hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros congruentes e cujos lados têm a mesma medida de comprimento do lado do hexágono, conforme podemos ver na imagem.



Refaça todos os itens da atividade 39 e verifique as funções que relacionam a medida de perímetro e a medida de área desse terreno em função da medida de comprimento do lado da região.

As respostas encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.

Características da função definida por $f(x) = ax^2 + k$, com $a \neq 0$

Examine ao lado as representações gráficas das funções quadráticas definidas a seguir e compare-as com o gráfico da função dada por $f(x) = x^2$, que está tracejado.

- $f(x) = x^2 + 2$
- $h(x) = x^2 - 1$
- $g(x) = x^2 + 1$
- $j(x) = x^2 - 2$

Podemos perceber que o eixo de simetria de todas as parábolas é o eixo y . Além disso, o ponto de mínimo de $f(x) = x^2 + 2$ é $(0, 2)$; o de $g(x) = x^2 + 1$ é $(0, 1)$; o de $h(x) = x^2 - 1$ é $(0, -1)$ e o de $j(x) = x^2 - 2$ é $(0, -2)$.

De modo geral, para $a > 0$, o **ponto de mínimo** de $f(x) = ax^2 + k$ é o vértice $V(0, k)$.

Observe agora os gráficos das funções quadráticas definidas a seguir e compare-os com o gráfico da função dada por $f(x) = -x^2$, que está tracejado.

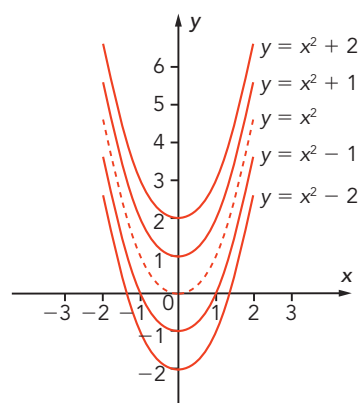
- $f(x) = -x^2 + 2$
- $h(x) = -x^2 - 1$
- $g(x) = -x^2 + 1$
- $j(x) = -x^2 - 2$

Nessas parábolas, o eixo de simetria também corresponde ao eixo y . O ponto de máximo de $f(x) = -x^2 + 2$ é $(0, 2)$; o de $g(x) = -x^2 + 1$ é $(0, 1)$; o de $h(x) = -x^2 - 1$ é $(0, -1)$ e o de $j(x) = -x^2 - 2$ é $(0, -2)$.

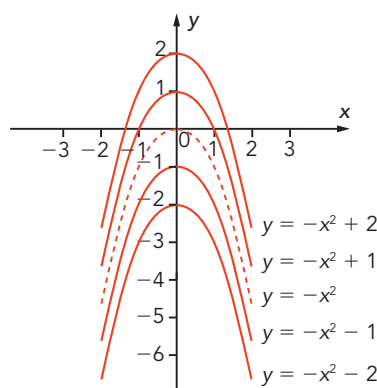
De modo geral, para $a < 0$, o **ponto de máximo** de $f(x) = ax^2 + k$ é o vértice $V(0, k)$.

Repare que o gráfico de $f(x) = ax^2 + k$ é congruente ao gráfico de $f(x) = ax^2$, isto é, tem a mesma curva, porém a posição dele está, em valores absolutos, k unidades acima ou abaixo, conforme k é positivo ou negativo, respectivamente.

Dizemos que o gráfico de $f(x) = ax^2 + k$ é o gráfico de $f(x) = ax^2$ transladado de k unidades para cima ou para baixo. É uma translação vertical que leva (x, y) em $(x, y + k)$, de acordo com o valor de k .



Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Não escreva no livro.

42. Escreva no caderno as coordenadas do ponto de mínimo ou de máximo de cada uma das funções quadráticas.

a) $f(x) = 3x^2 + 1$ $V(0, 1)$

c) $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ $V(0, -1)$

b) $g(x) = -3x^2 + 2$ $V(0, 2)$

d) $j(x) = 3x^2 - 1$ $V(0, -1)$

43. Quais das funções da atividade anterior têm valor mínimo e quais têm valor máximo? Quais são esses valores?
Valor mínimo: $f(x) \rightarrow 1$, $h(x) \rightarrow -1$, $j(x) \rightarrow -1$; valor máximo: $g(x) \rightarrow 2$.

44. Utilize régua milimetrada e esboce em um plano cartesiano o gráfico de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + m$, com a e m positivos. A resposta encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.

Características da função definida por $f(x) = a(x - m)^2$, com $a \neq 0$

Observe a tabela e os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = 2(x - 3)^2$, traçados no mesmo plano cartesiano.

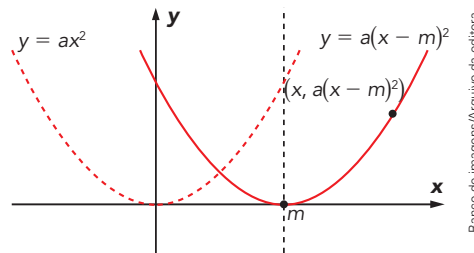
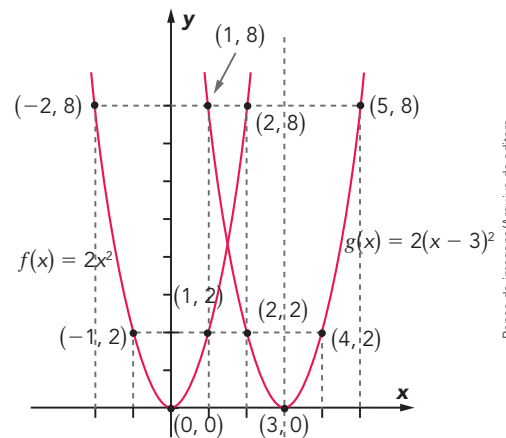
x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$f(x) = 2x^2$	...	8	2	0	2	8	18	...	...	...
$g(x) = 2(x - 3)^2$	...	...	...	18	8	2	0	2	8	...

O eixo da parábola que representa a função definida por $f(x) = 2x^2$ é o eixo y e o eixo da parábola que representa a função dada por $g(x) = 2(x - 3)^2$ é uma reta, paralela ao eixo y , e que passa pelo ponto $(3, 0)$. Assim, a parábola da função g é simétrica em relação a essa reta.

A parábola da função g é congruente à parábola da função f , transladada 3 unidades para a direita.

De modo geral, veja o que podemos afirmar sobre $f(x) = a(x - m)^2$.

- O gráfico de $f(x) = a(x - m)^2$ é congruente ao gráfico de $g(x) = ax^2$, porém a posição dele, em valores absolutos, é m unidades à direita ou à esquerda do gráfico de $g(x) = ax^2$, conforme m é positivo ou negativo, respectivamente. É uma translação horizontal que leva (x, y) em $(x + m, y)$.
- Se $a > 0$, a concavidade da parábola é para cima e ela tem um ponto de mínimo $V(m, 0)$; se $a < 0$, a concavidade é para baixo e a parábola tem um ponto de máximo $V(m, 0)$.
- A representação gráfica da função dada pela lei $f(x) = a(x - m)^2$ é simétrica em relação à reta, paralela ao eixo y , e que passa pelo ponto $(m, 0)$. Essa reta é o eixo de simetria da parábola.



Atividades

Não escreva no livro.

45. Utilize régua milimetrada e desenhe em um plano cartesiano o gráfico da função quadrática dada em cada item. Trace no plano o eixo da parábola e indique o ponto de máximo ou de mínimo da função. *As respostas encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.*

a) $f(x) = (x - 2)^2$

c) $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$

e) $k(x) = 3(x - 2)^2$

b) $g(x) = -2(x + 1)^2$

d) $j(x) = -\frac{1}{3}(x + 2)^2$

f) $m(x) = -5(x - 1)^2$

46. Observando as funções quadráticas da atividade anterior, responda aos itens no caderno.

a) Quais delas têm ponto de máximo? g, j e m .

c) Quais são esses pontos?

b) Quais delas têm ponto de mínimo? f, h e k .

São os vértices das parábolas: $V_f(2, 0)$; $V_g(-1, 0)$; $V_h(1, 0)$; $V_j(-2, 0)$; $V_k(2, 0)$; $V_m(1, 0)$.

Características da função definida por $f(x) = a(x - m)^2 + k$, com $a \neq 0$

O gráfico de $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é congruente ao gráfico de $g(x) = ax^2$ que vimos anteriormente, mas com as seguintes translações:

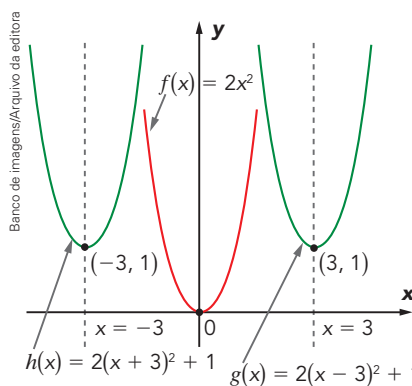
- x está, em valores absolutos, m unidades à direita ($m > 0$) ou à esquerda ($m < 0$) do gráfico de g ;
- x está, em valores absolutos, k unidades acima ($k > 0$) ou abaixo ($k < 0$) do gráfico de g .

Dessa maneira, podemos dizer que o eixo de simetria da parábola que representa $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é a reta, paralela ao eixo y , que passa por $(m, 0)$.

Observe os gráficos das funções quadráticas definidas por $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2(x - 3)^2 + 1$ e $h(x) = 2(x + 3)^2 + 1$.

De modo geral, a função dada por $f(x) = a(x - m)^2 + k$, com $a \neq 0$, é equivalente a $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{\Delta}{4a}$. Essa forma é chamada de **forma canônica da função quadrática**.

O vértice da parábola que representa a função dada por $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é $V(m, k)$; então também podemos escrever a forma canônica como $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$.



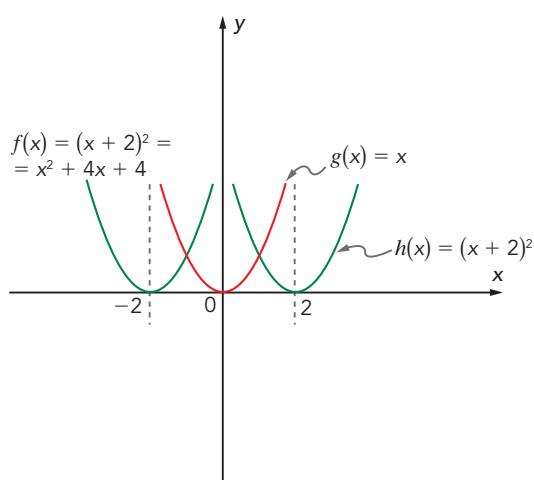
A parábola que representa $g(x) = 2(x - 3)^2 + 1$ está 3 unidades à direita e 1 unidade acima da parábola que representa $f(x) = 2x^2$ e é simétrica em relação à reta, paralela ao eixo y , que passa por $(3, 0)$.

A parábola que representa $h(x) = 2(x + 3)^2 + 1$ está 3 unidades à esquerda e 1 unidade acima da parábola que representa $f(x) = 2x^2$ e é simétrica à reta, paralela ao eixo y , que passa por $(-3, 0)$.

Atividades

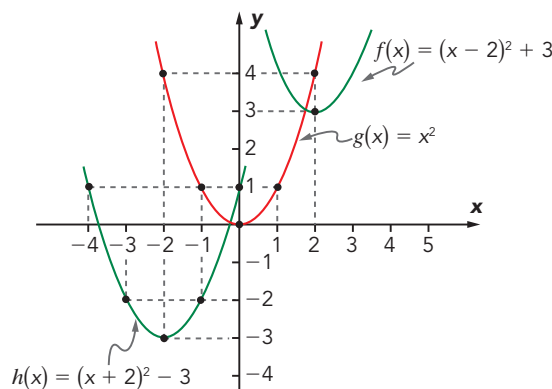
Não escreva no livro.

47. Observe no plano cartesiano os gráficos das funções quadráticas dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 2)^2$ e $h(x) = (x + 2)^2$ e responda aos itens.



- Como obtemos o gráfico de $f(x) = (x - 2)^2$ a partir do gráfico de $g(x) = x^2$?
Ele é deslocado 2 unidades para a direita.
- E o de $f(x) = (x + 2)^2$ a partir do gráfico de $g(x) = x^2$?
Ele é deslocado 2 unidades para a esquerda.
- Quais são as coordenadas dos vértices das parábolas que representam $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$ e $y = (x + 2)^2$?
(0, 0), (2, 0) e (-2, 0).

48. Observe no plano cartesiano os gráficos de funções quadráticas.



- Escreva no caderno as coordenadas do vértice de cada parábola. *As respostas encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.*
- Como obtemos o gráfico de $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ a partir do gráfico de $g(x) = x^2$?
- E o de $f(x) = (x + 2)^2 - 3$ a partir do gráfico de $g(x) = x^2$?
- E o de $j(x) = (x - m)^2 - k$ a partir do gráfico de $g(x) = x^2$?
- Crie a lei de uma função similar à dos itens anteriores e indique a posição dela no plano cartesiano em relação ao gráfico de g .

Conexões

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

As curvas que intrigaram os matemáticos

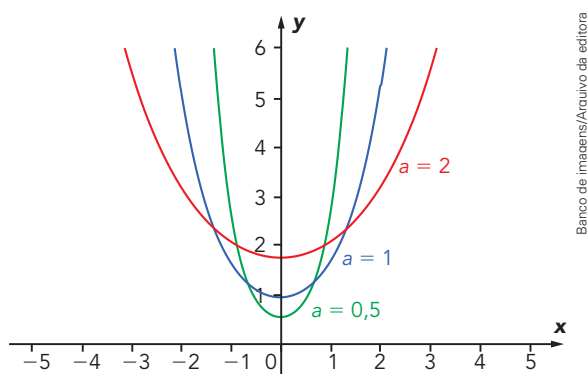
É muito comum nos depararmos com situações envolvendo certas curvas que podem parecer parábolas.

O matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano Galileu Galilei (1564-1642) propôs a conjectura, ou seja, fez uma suposição de acordo com observações, de que um fio flexível suspenso entre dois pontos sob a ação exclusiva da gravidade descreveria uma parábola. A situação suposta por Galileu gera uma curva muito parecida com a parábola, mas não é parábola.

Em 1646, aos 17 anos, o matemático, físico e astrônomo holandês Christiaan Huygens (1629-1695) mostrou que esse tipo de curva não era uma parábola, mas outra curva com uma equação um pouco mais complexa, pois envolve o conceito de relações trigonométricas hiperbólicas. São curvas de equações do tipo $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$.



Alguns lugares têm pilares como esses, em que as correntes ficam presas em dois pontos, um em cada pilar. A curva formada nessa situação é uma catenária.



$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \text{ com } a = 0,5, a = 1 \text{ e } a = 2.$$

Fique atento

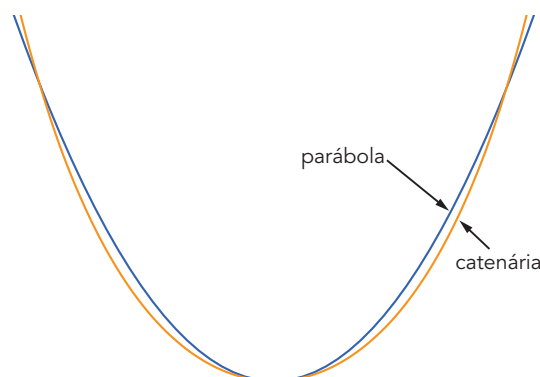
O número **e** que aparece nessa equação é conhecido como número de Euler ou número de Napier. Ele é um número irracional positivo comumente utilizado em estudos de Matemática financeira e Probabilidade.

Por ser um número irracional, ele tem infinitas casas decimais não periódicas. A aproximação desse número, com duas casas decimais, é 2,72.

O cientista e filósofo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) batizou essa curva com o nome de **catenária** (derivada do latim *catena*, que significa "cadeia").

Para melhor compreensão, diríamos que a catenária é a forma de uma corda de suspensão ideal para 2 pontos. A expressão "corda de suspensão ideal" significa que a corda é perfeitamente flexível e não extensível e com densidade uniforme. A catenária (em azul) e a parábola (em rosa) são quase coincidentes, e por isso é compreensível o erro de Galileu. No entanto, apesar de ambas terem um vértice e um eixo de simetria, as curvas são diferentes.

Uma corrente presa a dois postes de mesma medida de comprimento de altura descreve uma curva. Se nenhuma outra força atuar sobre essa corrente além da força da gravidade, ela descreverá uma catenária.



Banco de imagens/Arquivo da editora

0 uso de catenárias na Arte

As imagens não estão representadas em proporção

A catenária é uma curva muito utilizada na Arquitetura, na Engenharia e até na Arte. Antoni Gaudí (1852-1926) foi um arquiteto espanhol que fez parte do Modernismo catalão. Ele ficou famoso por usar catenárias e parábolas nos projetos arquitetônicos utilizando modelos em 3 dimensões, moldados pela gravidade. Para isso, ele usava fios e correntes pendurados; quando eles se estabilizavam, ele copiava as formas e as reproduzia em catedrais.

A Gaudí Chair é uma cadeira que tem medida de massa de 1 kg e foi projetada pelo designer Bram Geenen. A peça recebeu esse nome por ter sido construída com técnicas similares às de Gaudí. A cadeira foi feita com fibras de carbono, náilon e vidro, unidas por um jato de *laser*. O projeto dela foi desenvolvido com a ajuda de um software que distribuiu linhas verticais e horizontais ao longo da superfície do objeto, formando um feixe de grades.

O modo de fabricar a estrutura que sustenta a cadeira é obtido por um raciocínio análogo ao de suspender o conjunto de grades no teto e deixar que a gravidade atue sobre ele, adquirindo o formato mais lógico e a força máxima necessária, como acontece com estruturas suspensas como as descritas pela equação de uma catenária.

Fontes de consulta: AMORIM JUNIOR, Elias Feitosa de. Antoni Gaudí. Infoescola. Disponível em: <https://www.infoescola.com/biografias/antoni-gaudi/>. THE GAUDÍ Chair. FAZdesign, 7 out. 2011. Disponível em: <http://fazdesign.com.br/the-gaudi-chair/>. Acessos em: 30 abr. 2020.



Estudo de Gaudí em correntes suspensas com pesos, em Catalunha, Espanha. Foto de 2016.



Gaudí Chair, de Bram Geenen, c. 2010 (impressão 3D de poliamida com fibra de vidro e de carbono de 65 cm x 65 cm x 85 cm). Amsterdã, Holanda. Foto de 2010.

Conecte com o texto

1. Observe a representação da catenária, presente no texto, e responda no caderno: É correto afirmar que essa curva apresenta um eixo de simetria? **Sim, assim como a parábola, a catenária apresenta um eixo de simetria que passa pelo vértice dela.**
2. Observe as catenárias representadas no plano cartesiano na página anterior e responda no caderno: Quanto maior for o coeficiente a na equação da catenária, a curva se aproxima ou se afasta do eixo de simetria? **A curva se afasta do eixo de simetria.**
3. Na brincadeira de “pular corda”, se as extremidades dessa corda estão presas a uma mesma medida de comprimento de altura e a corda não toca o solo, qual é a curva que ela descreve? **Catenária.**

Pesquise e debata

4. Pesquise outras obras arquitetônicas nas quais apareçam arcos que podem ser relacionados a uma catenária. Depois, crie um *podcast*, vídeo, página na internet, entre outros, para apresentar suas descobertas aos colegas. **Exemplos de resposta: Cabos de sustentação da cobertura do Velodrome Stadium (Santiago Calatrava) e cascas sustentadas pelas paredes externas da Sydney Opera House (Jorn Utzon e Ove Arup & Partners).**
5. Pesquise a obra do arquiteto Antoni Gaudí e exemplos de como ele empregava a catenária nas obras arquitetônicas. **Exemplos de resposta: Arcos no sótão e na Casa Millá; arcos na arcada do Colégio de las Teresianas.**

Sobre o assunto

Para conhecer mais parábolas, catenárias e o uso delas na Arquitetura, sugerimos os livros indicados a seguir.

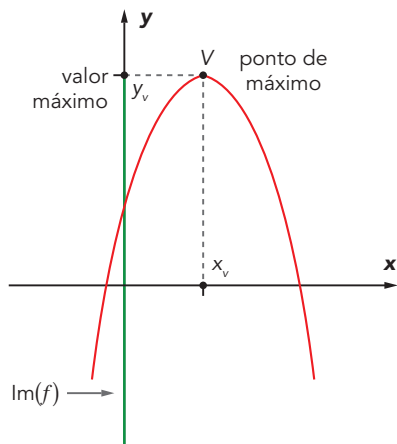
Manual do engenheiro. (Vários autores). Rio de Janeiro: Globo, 1964.

TALAVERA, Leda Maria Bastoni. *Parábola e catenária: histórias e aplicações*. Orientação de Antonio Carlos Brolezzi. São Paulo: [s. n.], 2008.

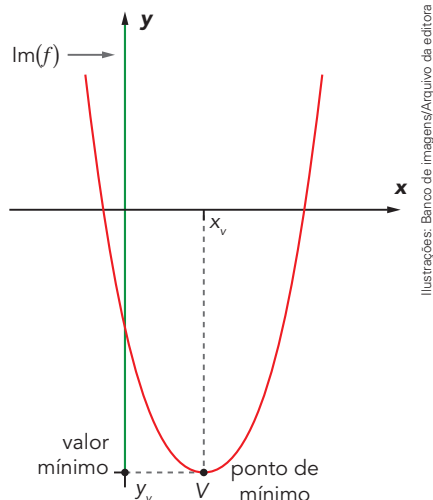
Vértice da parábola, conjunto imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática

A determinação do vértice da parábola ajuda na construção dela no plano cartesiano e permite determinar o **conjunto imagem da função**, bem como o **valor máximo** ou **mínimo** da função.

• $a < 0$



• $a > 0$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como vimos nos exemplos anteriores, o ponto de máximo ou de mínimo de uma função quadrática é o vértice da parábola relacionada à função.

Uma das maneiras de determinar o vértice é lembrar que a parábola é uma curva simétrica em relação ao eixo y ou a uma reta paralela ao eixo y.

Ao determinar a posição desse eixo, é possível encontrar a abscissa do vértice e, assim, obter a ordenada do vértice. Veja os exemplos.

a) $f(x) = 2x^2 - 8x$

1º modo:

As raízes da equação correspondente à função f são $x' = 0$ e $x'' = 4$. Dada a simetria das parábolas, o eixo de simetria passa pelo ponto de abscissa

$$x_v = \frac{x' + x''}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2.$$

Substituindo $x = 2$ na lei da função, obtemos a ordenada do vértice:

$$y_v = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = -8$$

2º modo:

Escrevendo na forma canônica, ou seja, na forma $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, temos: $f(x) = 2(x^2 - 4x) = 2(x^2 - 4x + 4 - 4) = 2(x - 2)^2 - 8$.

Então, o vértice é o ponto $V(2, -8)$.

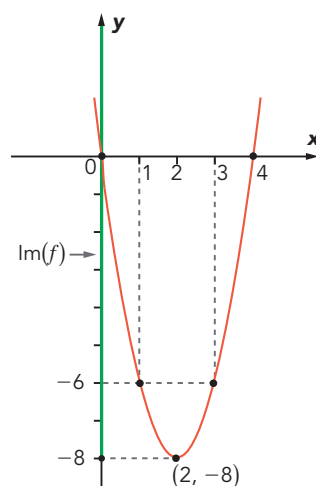
A função assume valor mínimo -8 quando $x = 2$.

Se o valor mínimo da função é $y = -8$, então o conjunto imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -8\}$.

Essa função não tem valor máximo, pois é ilimitada superiormente.

Fique atento

Se 2 é a abscissa do vértice, os pontos de abscissas 1 e 3 são simétricos na parábola, assim como os pontos de abscissas 0 e 4, por exemplo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

b) $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

Na forma canônica é possível determinar que $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$; então, o vértice da parábola que representa a função f , dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, também pode ser calculado assim: $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Nesse caso, temos:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

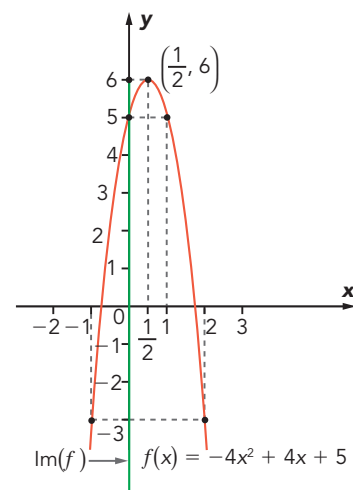
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 + 80)}{-16} = \frac{-96}{-16} = 6$$

Então, $V\left(\frac{1}{2}, 6\right)$.

A função assume valor máximo 6 quando $x = \frac{1}{2}$.

Se o valor máximo da função é $y = 6$, então o conjunto imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 6\}$.

Essa função não tem valor mínimo, pois é ilimitada inferiormente.



Banco de imagens/Arquivo da editora

De modo geral, dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, se $V(x_v, y_v)$ é o vértice da parábola correspondente, temos:

$$a > 0 \Leftrightarrow y_v \text{ é o valor mínimo de } f \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$$

$$a < 0 \Leftrightarrow y_v \text{ é o valor máximo de } f \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$$

Fique atento

Mais à frente vamos demonstrar a forma canônica usando o vértice da parábola.

Atividades resolvidas

6. A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que a medida de comprimento de altura h , em metros, t segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, responda aos itens.

- Em que instante a bola atinge a medida de comprimento de altura máxima?
- Qual é a medida de comprimento de altura máxima atingida pela bola?



Kyodo News/Getty Images

Representação da trajetória da bola em um chute a gol em um jogo de futebol.

Resolução

Ponto de máximo: $V(t_v, h_v)$

- A bola atinge a medida de comprimento de altura máxima quando:

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Logo, a bola atinge a medida de comprimento de altura máxima 3 segundos após o chute.

- A medida de comprimento de altura máxima atingida pela bola é:

$$h_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot (-1)} = \frac{-36}{-4} = 9 \text{ ou}$$

$$h(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = -9 + 18 = 9$$

A medida de comprimento de altura máxima atingida pela bola é 9 metros.

7. Determine a $\text{Im}(f)$ e o valor máximo ou mínimo da função quadrática dada por $f(x) = x^2 + 4x - 2$.

Resolução

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 + 8)}{4} = -6$$

$a > 0$, então a concavidade é para cima e a curva é limitada inferiormente; portanto, a função f tem valor mínimo.

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -6\}$$

Valor mínimo de f : -6 .

8. Determine m de modo que a função definida por $f(x) = (3m - 1)x^2 - 5x + 2$ admita valor máximo.

Resolução

Para que a função f admita valor máximo, devemos ter $a < 0$ (concavidade para baixo).

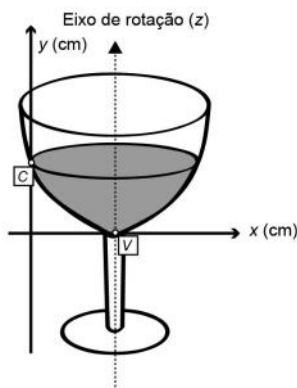
$$\text{Condição: } a < 0 \Leftrightarrow 3m - 1 < 0$$

$$3m - 1 < 0 \Rightarrow 3m < 1 \Rightarrow m < \frac{1}{3}.$$

Logo, m pode ser qualquer número real menor do que $\frac{1}{3}$.

Resolvida passo a passo

9. (Enem) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z , conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida de altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V , na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x .

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

- a) 1. b) 2. c) 4. d) 5. e) 6.

Resolução

1. Lendo e compreendendo

- a) O que é dado no problema?

É dada a lei da função real que é representada pela parábola, que forma a parte interior da taça. A projeção da taça em um plano cartesiano mostra que o vértice da parábola intersecta o eixo x e o ponto C intersecta o eixo y .

- b) O que se pede?

A medida de comprimento de altura do líquido dentro da taça, em centímetros.

2. Planejando a solução

Observando a projeção da taça no plano cartesiano, verifica-se que o vértice da parábola tem coordenadas $(x_V, 0)$, ou seja, $y_V = 0$. Usando essa informação, é possível calcular o valor de C utilizando as coordenadas do vértice da parábola $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, chegando a uma equação do 1º grau em que a incógnita será C , que é a medida de comprimento de altura do líquido na taça.

3. Executando o que foi planejado

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\left[(-6)^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot C\right]}{4 \cdot \frac{3}{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-[36 - 6C]}{6} = 0 \Rightarrow \frac{-36 + 6C}{6} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 + C = 0 \Rightarrow C = 6$$

4. Verificando

A partir da lei da função $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6$, calculamos o valor de y_V :

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\left[(-6)^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 6\right]}{4 \cdot \frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{-[36 - 36]}{6} = 0$$

Esse valor corresponde ao valor obtido a partir do enunciado. Assim, fica verificado que o valor de C (medida de comprimento de altura do líquido na taça) é 6 cm.

5. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **e**.

6. Ampliando o problema

- a) Determine as coordenadas do vértice V demarcado na figura. $V(2,0)$
- b) Troque ideias com os colegas sobre a importância da Matemática na determinação de medidas em indústrias, como comprimentos, intervalos de tempo, volumes, entre outras grandezas, e sobre como elas utilizam essas medidas para obter o maior rendimento possível na produção.

Resposta pessoal.

Atividades

Não escreva no livro.

49. Considere a função dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$. Os zeros dessa função podem ser encontrados a partir das raízes da equação correspondente: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. *As respostas encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.*

a) Desenvolva a expressão $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$ para obter a abscissa do vértice em função dos coeficientes a e b .

b) Utilize a resposta do item anterior e a lei da função f para obter a ordenada do vértice em função dos coeficientes a , b e c .

Dica 1: Se você obtiver frações com denominadores diferentes, calcule o mínimo múltiplo comum.

Dica 2: Lembre-se de que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sabendo que o vértice de uma parábola pode ser obtido calculando a abscissa e a ordenada do ponto médio entre os pontos que indicam os zeros da função, vamos ver outra maneira de chegar às coordenadas do vértice $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

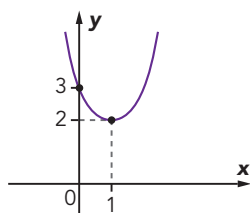
50. Considere uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tal que os pontos apresentados na tabela a seguir pertencem ao gráfico da função.

x	-3	-2	0	2	3
y	18	8	0	8	18

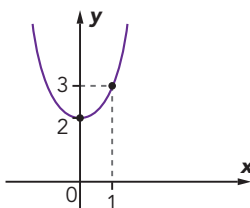
Observe as coordenadas desses pontos. Depois, marque-os no plano cartesiano, identifique o eixo de simetria da parábola dessa função e determine a lei dela.

51. Escreva no caderno a lei da função, na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, correspondente ao gráfico dado em cada plano cartesiano.

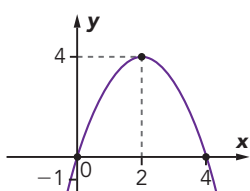
a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$



b) $f(x) = x^2 + 2$



c) $f(x) = -x^2 + 4x$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

52. Esboce no plano cartesiano o gráfico da função quadrática f que passa pelos pontos $(3, -2)$ e $(0, 4)$ e tem vértice $(2, -4)$. Em seguida, verifique qual das seguintes sentenças corresponde a essa função.

a) $f(x) = -2x^2 - 8x + 4$ c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$
 b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$

53. Os golfinhos são um dos mamíferos mais inteligentes do mundo animal. Conseguem se comunicar e socializar de maneira parecida com a dos seres humanos. Os saltos deles são bonitos e graciosos e quase sempre têm um formato de parte de uma parábola. O salto de um golfinho pode durar até 3 segundos, aproximadamente.

Considere que o salto de um golfinho formou parte de uma parábola e que a medida de intervalo de tempo do salto, entre sair da água e entrar de volta nela, foi de 2 segundos. Após quantos segundos ele chegou ao ponto mais alto da trajetória? **1 segundo.**

54. Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de certo produto é dado por $C = x^2 - 80x + 3\,000$. Nessas condições, calcule:

a) a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo; **40 unidades.**
 b) o valor mínimo de custo. **R\$ 1.400,00**

55. Uma bola é lançada ao ar. Suponha que a medida de comprimento de altura h , em metros, t segundos após o lançamento, seja $h = -t^2 + 4t + 6$. No caderno, determine:

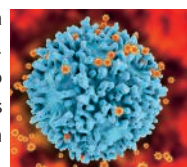
a) o instante em que a bola atinge a medida de comprimento de altura máxima; **2 s**
 b) a medida de comprimento de altura máxima atingida pela bola; **10 m**
 c) quantos segundos depois do lançamento a bola toca o solo. **310 s**

56. Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R\$ 20,00 mais R\$ 2,00 por lugar vago. Qual é o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? **15 passageiros.**

57. Uma vacina é um preparo biológico que contém o vírus enfraquecido da doença para a qual se deseja a imunidade. Como esse vírus está fragilizado, o corpo consegue combatê-lo facilmente e registrar a informação para enfrentá-lo na forma natural, em uma situação posterior.

Estrutura do vírus da imunodeficiência humana (HIV), vírus causador da aids.

Ele ataca o sistema imunológico do hospedeiro, impedindo que as células de defesa protejam o corpo. Imagem sem proporção e em cores fantasia.



Kateryna Kori/Science Photo Library/Fotorena

Em um laboratório, cientistas observaram que a concentração C de determinada vacina, em mg/L, no sangue de animais de certa espécie, varia de acordo com a função dada pela lei $C(t) = \frac{-t^2}{4} + 6t$, em que t é a

medida de intervalo de tempo decorrido, em horas, após a aplicação da vacina, durante um período de observação de 24 horas. Determine a medida de intervalo de tempo necessária, após o início do experimento, para que a vacina atinja nível máximo de concentração no sangue desses animais.

Alternativa c.

- a) 8 horas.
- b) 10 horas.
- c) 12 horas.
- d) 14 horas.
- e) 16 horas.

58. A medida de temperatura, em grau Celsius, no interior de uma câmara é dada pela função de lei $T(t) = t^2 - 8t + k$, em que t é dado em minutos, e k é uma constante positiva. Quando a câmara foi ligada, a medida de temperatura no interior dela era de 12°C , e ela só foi desligada depois de 10 minutos.

- a) Em quais instantes a medida de temperatura era de 0°C ? 2 min e 6 min.
- b) Em qual instante a temperatura foi mínima? 4 min
- c) Qual foi a medida de temperatura mínima? -4°C
- d) Qual era a medida de temperatura quando a câmara foi desligada? 32°C

59. Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alamedado o entorno de uma quadra de basquete.

- a) Sabendo que foi disponibilizada uma tela com 200 metros de medida de comprimento, indique a lei da função que relaciona a medida de área da quadra em função da medida de comprimento da largura x .
- b) Quais devem ser as medidas de comprimento da largura e da profundidade da quadra a ser cercada com essa tela para que a medida de área seja a maior possível? 50 m e 50 m.
- c) Construa, no plano cartesiano, o gráfico relacionado à função do item a.

O gráfico encontra-se nas Orientações específicas deste Manual.

60. Uma pessoa dispõe de uma tela com medida de comprimento de 15 metros, com a qual pretende fazer um galinheiro de forma retangular, aproveitando um muro da chácara para economizar material. Do lado oposto ao muro, ela pretende reservar um espaço de 1 metro de medida de comprimento para o portão, no qual não utilizará tela. Qual é a maior medida de área (área máxima) que pode ter esse galinheiro? 32 m^2

61. Se uma editora vende cada livro por R\$ 20,00, ela consegue vender 200 livros e o valor de arrecadação é R\$ 4.000,00. Percebendo que, para cada real de desconto no preço do livro, a quantidade de livros vendidos aumenta em 50 unidades, qual deve ser o valor de venda de cada livro para que a editora consiga o maior retorno financeiro possível? R\$ 12,00

62. A velocidade de disseminação de uma doença é diretamente proporcional ao número de pessoas infectadas e diretamente proporcional também ao número de pessoas ainda não infectadas. A função dada pela lei $V(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$ representa essa velocidade de disseminação, em que x é o número de pessoas infectadas, P é a população total prevista a ser infectada e k é uma constante positiva que depende das medidas de prevenção.

- a) Nesse contexto, sabendo que a previsão era de que 460 mil pessoas de uma região sejam infectadas, qual é o número de pessoas infectadas para que tenhamos a velocidade máxima de disseminação?
- b) Junte-se a um colega e elaborem mais uma questão sobre a velocidade de disseminação de uma doença. Depois, troquem com uma dupla de colegas e tentem resolver a questão deles.

230 mil.

63. O pomar de José tem 50 mangueiras e cada uma delas produz em média 400 mangas por ano. Um engenheiro agrônomo constatou que, se fossem plantadas x novas mangueiras nesse pomar, cada mangueira (tanto nova quanto velha) passaria a produzir 20 mangas a menos por ano, pois estariam disputando os nutrientes do solo. Considerando a situação descrita, qual é a produção anual máxima de mangas que o pomar de José pode alcançar, em milhares de frutas? Alternativa a.

- a) 24,5
- c) 26,8
- e) 30,1
- b) 25,2
- d) 28

64. O proprietário de um teatro no Paraná conduziu uma pesquisa entre os frequentadores e concluiu que, se o preço da entrada de um espetáculo fosse R\$ 100,00, não haveria público suficiente e, a cada 2 reais de desconto na entrada, uma pessoa a mais se interessaria em assistir ao espetáculo. Depois da pesquisa, o proprietário do teatro decidiu lançar a seguinte promoção: "Acompanhante paga meia".

Considere que o custo com cada cliente é de R\$ 15,00 e que o lucro é dado pelo total arrecadado menos o custo. Qual é o número de frequentadores, todos com acompanhantes, que maximiza o lucro do teatro?

Alternativa b.

- a) 30.
- d) 60.
- b) 20.
- e) 25.
- c) 10.

62. b) Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Qual é a velocidade máxima de disseminação quando $k = 0,5$?

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Saque no voleibol

Galileu Galilei foi um dos principais cientistas responsáveis pelo desenvolvimento da Física Moderna experimental. Entre os tópicos que ele estudou está o movimento dos **projéteis**. Considerando determinadas condições, Galileu percebeu que o movimento dos projéteis tem a trajetória como uma parte de uma parábola. Dessa maneira, uma bola de voleibol ao ser sacada pode ser considerada um projétil e realizará um movimento parabólico.

O estudo de Galileu tem quatro pontos principais:

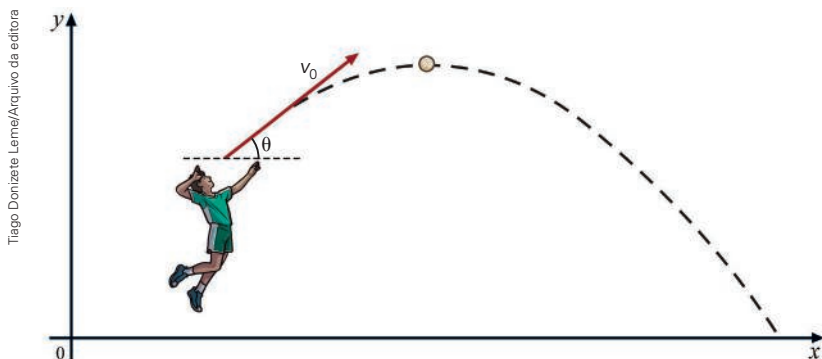
1. O movimento ocorre num plano vertical.
2. O movimento pode ser decomposto em um movimento uniforme, ao longo de um plano horizontal, e um movimento uniformemente variado ao longo de um eixo na vertical.
3. A trajetória é [uma parte] da parábola.
[...]
4. Os itens 2 e 3 acima são válidos desde que não levemos em conta a resistência do ar. Trata-se, portanto, de uma aproximação.

MARQUES, Gil da Costa. Movimento dos projéteis. *Dinâmica do movimento dos corpos*. Licenciatura em Ciências, USP/Univesp. Disponível em: https://midia.atp.usp.br/plc/plc00:02/impressos/plc0002_10.pdf. Acesso em: 19 abr. 2020.

Sob as seguintes condições:

- desprezar os efeitos causados pelo ar;
- considerar que a força resultante que age sobre o projétil, a partir do instante zero, é apenas de natureza gravitacional;

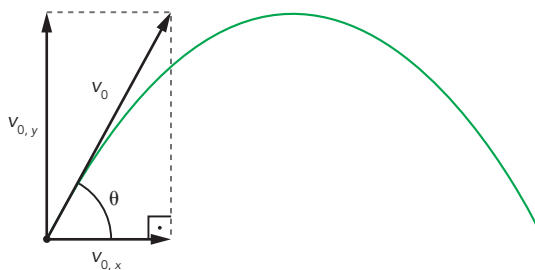
podemos dizer que a trajetória descrita pelo movimento da bola, lançada a partir de uma velocidade inicial de intensidade v_0 , cuja direção forma um ângulo em relação à horizontal com medida de abertura θ , tal que $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$, pode ser descrita por uma função y cuja representação gráfica é parte de uma parábola.



Representação gráfica da função y que relaciona as posições de um projétil no espaço. A representação gráfica está em um plano cartesiano e os eixos representam as medidas de comprimento das dimensões espaciais: altura y e distância x .

Galileu propôs o princípio da simultaneidade (ou princípio da independência dos movimentos), em que cada um dos movimentos que fazem parte de um movimento composto se comporta como se os demais não existissem no mesmo intervalo de tempo.

Podemos decompor o movimento da bola em horizontal, com velocidade inicial de intensidade igual a $v_{0,x}$, e vertical, com velocidade inicial de intensidade igual a $v_{0,y}$.



Edio Suzano/Fotarena

O saque no voleibol é um movimento que tem o objetivo de colocar a bola no jogo, lançando-a para a quadra adversária. A trajetória descrita pelo movimento da bola após um saque pode ser comparada a uma parte de uma parábola.

WYM Design/Arquivo da editora

Desprezando os efeitos causados pelo ar e considerando que a única força que age sobre a bola de voleibol após encerrar o contato com o atleta é a de natureza gravitacional, esses movimentos apresentam as funções horárias dos espaços dadas a seguir.

- Movimento vertical (Movimento Retilíneo Uniformemente Variado):

$$y(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_{0,y} \cdot t + y_0$$

- Movimento horizontal (Movimento Retilíneo e Uniforme): $x(t) = x_0 + v_x \cdot t$

Quando a bola não é lançada com $\theta = 90^\circ$ em relação à horizontal, a função y pode ser representada por uma parábola.

Como g , $v_{0,y}$ e y_0 são constantes, podemos reescrever a função assumindo que:

- $-\frac{g}{2} = a$
- $v_{0,y} = b$
- $y_0 = c$

Dessa maneira, temos: $y(t) = at^2 + bt + c$.

Logo, trata-se de uma função quadrática cuja representação gráfica é uma parábola.

Agora, demonstraremos que a função que descreve a trajetória da bola também é quadrática para o caso em que a bola não é lançada a 90° em relação à horizontal, como na representação gráfica da página anterior.

Da função horária dos espaços para o eixo x , podemos chegar à lei $t(x) = \frac{x - x_0}{v_x}$. Substituindo t por $t(x)$

na função horária dos espaços para o eixo y , temos: $y(t(x)) = -\frac{gt(x)^2}{2} + v_{0,y} \cdot t(x) + y_0$

$$\text{Calculando } t(x) = \frac{x - x_0}{v_x}, \text{ temos: } y(x) = \frac{-g\left(\frac{x - x_0}{v_x}\right)^2}{2} + v_{0,y} \cdot \left(\frac{x - x_0}{v_x}\right) + y_0$$

$$y(x) = \frac{-gx^2 + 2 \cdot g \cdot x \cdot x_0 - g \cdot x_0^2}{2v_x^2} + \frac{v_{0,y} \cdot x - v_{0,y} \cdot x_0}{v_x} + y_0$$

Reescrevendo convenientemente essa função, temos que:

$$y(x) = \left(-\frac{g}{2v_x^2}\right) \cdot x^2 + \left(\frac{gx_0}{v_x^2} + \frac{v_{0,y}}{v_x}\right) \cdot x + \left(-\frac{gx_0}{2v_x^2} - \frac{v_{0,y}x_0}{v_x} + y_0\right)$$

Como g , x_0 , v_x , $v_{0,y}$ e y_0 são constantes, podemos reescrever a função assumindo que:

- $\frac{-g}{2v_x^2} = a$
- $\frac{gx_0}{v_x^2} + \frac{v_{0,y}}{v_x} = b$
- $-\frac{gx_0}{2v_x^2} - \frac{v_{0,y}x_0}{v_x} + y_0 = c$

Temos: $y(x) = ax^2 + bx + c$

Efeitos causados pelo ar

Com o objetivo de facilitar a elaboração de modelos que descrevem o modo como algumas variáveis se relacionam durante o movimento de uma bola, desprezamos os efeitos causados pelo ar sobre a bola após ser sacada. Contudo, se analisássemos rigorosamente casos reais, perceberíamos os efeitos causados pelo ar sobre a bola.

Além do vento, o ar poderia influenciar o movimento da bola por meio do arrasto e pelo efeito Magnus. Veja o que podemos dizer, de modo simplificado.

- Arrasto é a força exercida por um fluido sobre um objeto sólido que está em movimento nesse fluido. A intensidade dessa força é proporcional à intensidade da velocidade do móvel e tem a mesma direção da velocidade, mas sentido oposto, ou seja, o arrasto faz resistência ao movimento do objeto no fluido.
- O efeito Magnus ocorre quando a rotação de um objeto em um fluido provoca alteração na trajetória do objeto.

Segundo simulações realizadas no estudo "Modelo computacional para a dinâmica de uma bola de vôlei para a definição de estratégias de saque aplicadas", considerando as mesmas condições iniciais – em que a medida de abertura do ângulo formado entre a direção da velocidade inicial da bola sacada e a horizontal é igual a 45° e a intensidade dessa velocidade é igual a 13,72 m/s –, temos as seguintes medidas de intervalo de tempo entre o saque e o impacto com a quadra para cada modelo.

- Modelo considerando apenas a força gravitacional: 2,11 s.
- Modelo considerando a força gravitacional e a força de arraste: 1,96 s.
- Modelo considerando a força gravitacional, a força de arraste e a força Magnus: 1,66 s.

Fonte de consulta: LUVIZOTTO, Jessica. *Modelo computacional para a dinâmica de uma bola de vôlei para a definição de estratégias de saque aplicadas*. Monografia apresentada ao Instituto de Biociências da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho para obtenção do título de bacharel em Física Médica. Botucatu, 2012.

O modelo que considera apenas a força gravitacional e a força de arraste funciona muito bem para modelar casos reais em que os efeitos provocados por vento ou pela rotação da bola são nulos ou desprezíveis. No caso em questão, a diferença entre o modelo que considera apenas a força gravitacional e o que utiliza a força gravitacional e a força de arraste foi de 0,15 s (aproximadamente 7,1% de diferença), o que pode ser entendido como aceitável dependendo do nível de precisão que se deseja obter.

Conecte com o texto

1. Professor, incentive os estudantes a usar alguma ferramenta computacional, como o GeoGebra, para visualizar o gráfico da atividade proposta.

1. O voleibol é um esporte criado em 9 de fevereiro de 1895 por William George Morgan, nos Estados Unidos. A intenção do criador era elaborar um esporte de equipes, mas sem contato físico. Há a modalidade de praia e de quadra e, em ambas, o objetivo é lançar a bola por cima da rede para que ela caia no campo adversário. Suponha um saque de voleibol em que $v_{0,y} = 6 \text{ m/s}$ e $y_0 = 2 \text{ m}$. Assumindo desprezíveis os efeitos provocados pelo ar e que a aceleração gravitacional local é $g = 10 \text{ m/s}^2$, qual será a medida de comprimento de altura máxima atingida pela bola e qual será o instante em que isso acontecerá? **3,8 m e 0,6 s.**
2. Em alguns momentos desta seção, usamos um modelo que desconsidera os efeitos causados pelo ar para analisar, de modo aproximado, o movimento de uma bola de voleibol após ser sacada. No entanto, há movimentos em que os efeitos provocados pelo ar não podem ser desprezados. Dê exemplos de movimentos desse tipo. **Exemplos de resposta: Queda de um paraquedista com o paraquedas aberto; movimento de voo de um avião.**

Pesquise e debata

3. No final dos anos 1990 uma nova modalidade do voleibol surgiu e ganhou popularidade: o voleibol adaptado. Essa modalidade foi elaborada para promover a participação, principalmente, de pessoas idosas (acima de 60 anos).

“É uma atividade que trabalha com o alongamento dos praticantes, ao mesmo tempo em que exercita o uso moderado de força e da técnica e, principalmente, a socialização, já que demanda paciência e trabalho em equipe. É bastante completo para a terceira idade”, avalia a professora Adriana Arista Silva, responsável pela modalidade juntamente com o professor José Geraldo Ramos de Oliveira, o Chinha, que também é técnico da equipe masculina.

VÔLEI adaptado é garantia de qualidade de vida para terceira idade. Prefeitura de Itupeva. Disponível em: <https://itupeva.sp.gov.br/site/9-noticias/816-volei-adaptado-e-garantia-de-qualidade-de-vida-para-terceira-idade>. Acesso em: 22 abr. 2020.

Pesquise na internet e produza um material de divulgação que indique os benefícios associados à prática de esportes na terceira idade. Você pode criar um vídeo, um panfleto ou até uma página na internet. Seja criativo!

3. Manutenção da capacidade funcional; integração social; aumento da qualidade de vida em razão da melhora da saúde física, pois a prática de esportes pode evitar dores e mal-estar e prevenir e/ou retardar o aparecimento de algumas doenças, além de auxiliar no tratamento delas.

Sobre o assunto

Para conhecer mais projéteis e os movimentos deles, sugerimos os sites indicados a seguir (acesso em: 31 abr. 2020). O segundo apresenta um simulador do movimento de um projétil.

Movimento dos projéteis. Disponível em: https://midia.atp.usp.br/plc/plc0002/impressos/plc0002_10.pdf.

Movimento de um projétil, da Universidade do Colorado. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/projectile-motion.

Para conhecer mais voleibol, ou vôlei, sugerimos os sites a seguir (acesso em: abr. 2020).

Voleibol. Disponível em: <http://www.educacaoofisica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=73>.

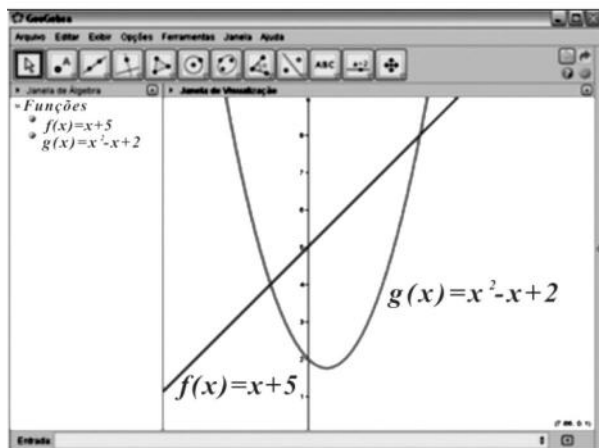
Vôlei de quadra – Entrevista com Felipe Augusto Kurachina. Disponível em: <http://www.usp.br/cje/esportivo/index.php/2017/11/30/volei-de-quadra-entrevista-com-felipe-augusto-kurachina/>.

Vestibulares e Enem

1. (UFT-TO) Ao realizar o estudo de sua produção diária, uma cozinheira que faz e vende pamonhas, descobriu que o lucro em reais é calculado pela função $L(x) = -x^2 + 30x - 200$, onde x é o número de pamonhas feitas e vendidas. Com base nestas informações, é correto afirmar que o lucro máximo diário da cozinheira é: **Alternativa d.**

- a) R\$ 10,00. c) R\$ 20,00.
b) R\$ 15,00. d) R\$ 25,00.

2. (Uepa) A utilização de computadores como ferramentas auxiliares na produção de conhecimento escolar tem sido uma realidade em muitas escolas brasileiras. O GeoGebra é um software educacional utilizado no ensino de Matemática (geometria dinâmica). Na ilustração abaixo se tem a representação dos gráficos de duas funções reais a valores reais, definidas por $g(x) = x^2 - x + 2$ e $f(x) = x + 5$.



Construção dos gráficos das funções no GeoGebra.

Fonte: <<http://portalprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula-53900>>.

Nestas condições, a soma das ordenadas dos pontos de interseção dos gráficos que representam as duas funções polinomiais acima ilustradas é: **Alternativa e.**

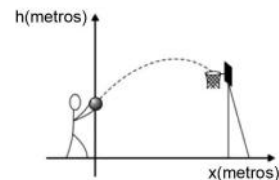
- a) 2. b) 5. c) 7. d) 11. e) 12.

3. (IFBA) Durante as competições olímpicas, um jogador de basquete lançou a bola para o alto em direção à cesta. A trajetória descrita pela bola pode ser representada por uma curva chamada parábola, que pode ser representada pela expressão: $h = -2x^2 + 8$ (onde " h " é a altura da bola e " x " é a distância percorrida pela bola, ambas em metros).

A partir dessas informações, encontre o valor da altura máxima alcançada pela bola: **Alternativa c.**

- a) 4 m. c) 8 m. e) 12 m.
b) 6 m. d) 10 m.

4. (IFPE) A figura a seguir ilustra o momento do lançamento de uma bola de basquete para a cesta. Foi inserido o sistema de coordenadas cartesianas para representar a trajetória da bola, de modo que a altura h da bola é dada em função da distância horizontal x pela equação $h = -0,1x^2 + 1,2x + 2,5$, com h e x medidos em metros. Determine a altura máxima atingida pela bola. **Alternativa a.**



- a) 6,1 metros. c) 7,2 metros. e) 8,3 metros.
b) 6,3 metros. d) 7,5 metros.

5. (UCB-DF) Um estudo epidemiológico da propagação da gripe em uma pequena cidade descobre que o número total P de pessoas que contraíram a gripe após t dias, em um surto da doença, é modelado pela seguinte função: $P(t) = -t^2 + 13t + 130$ com $1 \leq t \leq 6$. Após quantos dias o número de pessoas infectadas será igual a 160? **Alternativa b.**

- a) 6 b) 3 c) 4 d) 2 e) 5

6. (ESCS-DF) A globalização também ocorre no aspecto linguístico, de forma que palavras estrangeiras são frequentemente incluídas em nosso vocabulário. Hoje, dizemos corriqueiramente que vamos a um restaurante *self-service*, que estamos *on-line*, que precisamos fazer um *download* e que postamos uma *selfie*.

Considere que seja de $P(t)\%$ o percentual de palavras estrangeiras no total de palavras utilizadas diariamente na Língua Portuguesa, em que $P(t) =$

$$= \frac{1}{100} (64 + 88t - t^2), \quad t = 0 \text{ representa o tempo presente, } t = 1 \text{ representa uma estimativa para daqui a 1 ano, e assim sucessivamente até os próximos 85 anos (} t = 85 \text{). Nessa situação, é correto afirmar que a referida porcentagem chegará a 20\% para: } \textbf{Alternativa a.}$$

a) $35 < t < 45$. c) $t > 55$.
b) $45 < t < 55$. d) $t < 35$.

7. (ESPM-RJ) Um reservatório de água com capacidade para 1 800 litros está completamente cheio e será esvaziado por uma torneira situada no seu fundo.

A função $V(x) = 75 \cdot (x^2 - 10x + k)$ representa o volume de água restante no reservatório após x horas de esvaziamento.

Podemos afirmar que ele ficará completamente vazio para x igual a: **Alternativa c.**

- a) 7. b) 5. c) 4. d) 8. e) 3.

8. (Enem) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no: **Alternativa b.**

- a) 19^a dia. c) 29^a dia. e) 60^a dia.
b) 20^a dia. d) 30^a dia.

9. (Enem) No desenvolvimento de um novo remédio, pesquisadores monitoram a quantidade Q de uma substância circulando na corrente sanguínea de um paciente, ao longo do tempo t . Esses pesquisadores controlam o processo, observando que Q é uma função quadrática de t . Os dados coletados nas duas primeiras horas foram:

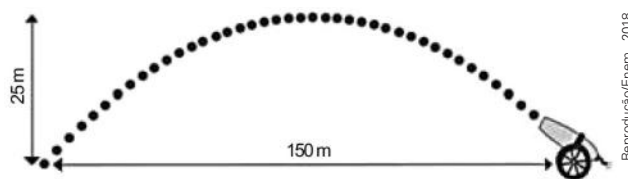
t (hora)	0	1	2
Q (miligrama)	1	4	6

Para decidir se devem interromper o processo, evitando riscos ao paciente, os pesquisadores querem saber, antecipadamente, a quantidade da substância que estará circulando na corrente sanguínea desse paciente após uma hora do último dado coletado.

Nas condições expostas, essa quantidade (em miligrama) será igual a: **Alternativa b.**

- a) 4. b) 7. c) 8. d) 9. e) 10.

10. (Enem) Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.



Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto $(150, 0)$ e que o projétil atinge o solo no ponto $(0, 0)$ do plano xy .

A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é: **Alternativa e.**

- a) $y = 150 - x^2$. d) $125y = 450x - 3x^2$.
b) $y = 3750x - 25x^2$. e) $225y = 150x - x^2$.
c) $75y = 300x - 2x^2$.

11. (Enem) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como: **Alternativa d.**

- a) muito baixa. d) alta.
b) baixa. e) muito alta.
c) média.

12. (Enem) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

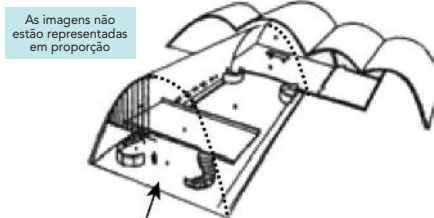


Figura 1

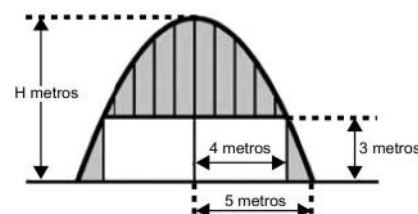


Figura 2

Qual a medida de altura H , em metro, indicada na figura 2? **Alternativa d.**

- a) $\frac{16}{3}$ b) $\frac{31}{5}$ c) $\frac{25}{4}$ d) $\frac{25}{3}$ e) $\frac{75}{2}$

Capítulo 1: Função afim

Atividades

1. $f(x) = 3x + 1$

Início

Nomeie de x o valor de entrada.

Crie n

$$n \leftarrow 3 \cdot x + 1$$

Saída: n

Fim

2. a) $-1; 3; 7; 11; 15$. c) $6; 9; 12; 15; 18$.
b) $-6; -1; 4; 9; 14$. d) $1; 1,5; 2; 2,5; 3$.

3. a) A medida de área A e a medida de comprimento do lado ℓ da região quadrada.

b) A medida de área A .

c) A medida de comprimento do lado ℓ .

d) $A = \ell^2$

e) 144 cm^2

f) 13 cm

4. a) $f(x) = \frac{x}{3}$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

b) $f(x) = 2x - 3$ d) $f(x) = x^3 + x^2$

5.

x (em h)	d (em km)
1	56
2	106
3	156
4	206
5	256

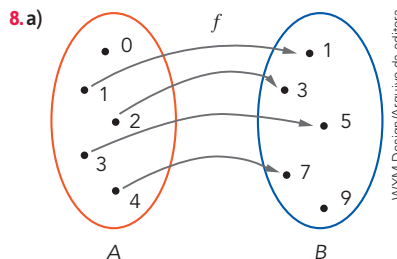
6. a) 80 unidades. c) Resposta pessoal.
b) Lucro.

7. a) Não representa uma função de A em B , pois o elemento 5 de A não está relacionado a um elemento em B .

b) Representa uma função de A em B .

c) Não representa uma função de A em B porque o elemento $-2,7$ de A não está relacionado a um elemento em B , e porque os elementos $0,5$ e $-\frac{1}{3}$ de A estão, cada um, relacionados a mais de um elemento de B .

d) Não representa uma função de A em B , pois os elementos 1 e 2 de A estão, cada um, relacionados a mais de um elemento de B .

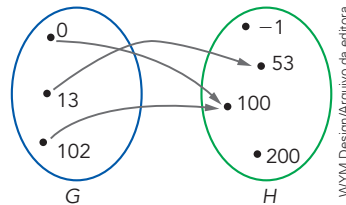


b) f não representa uma função de A em B , pois o elemento 0 de A não está relacionado a um elemento em B .

9. a) Exemplo de resposta: $G = \{0, 13, 102\}$ e $H = \{-1, 53, 100, 200\}$.

b) Exemplo de resposta:

$x \in G$	0	13	102
$y \in H$	100	53	100



10. a) $D(f) = \{1, 3, 5, 7\}$;
 $CD(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

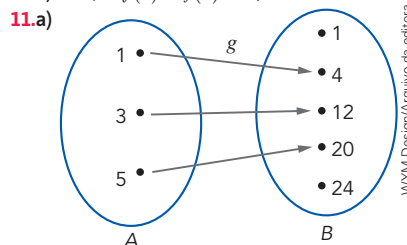
b) $\text{Im}(f) = \{4, 6, 8\}$

c) $f(3) = 4$

d) Sim; 2 e 10.

e) Não.

f) Sim; $8(f(5) = f(7) = 8)$.



b) $D(g) = \{1, 3, 5\}$; $CD(g) = \{1, 4, 12, 20, 24\}$; $\text{Im}(g) = \{4, 12, 20\}$.

c) $g(3) = 12$

d) $x = 5$

e) $x = 1$

12. a) 37

b) 26,4 cm

13. Alternativa d.

14. a) km 189,5 e km 220.

b) $\frac{31}{183} \text{ h}$ e $\frac{91}{183} \text{ h}$.

15. a) 95°F

b) 160°C

16. Alternativa c.

17. 50°F

18. $48,9^\circ \text{C}$

19. 122°F

20. $7,9 \text{ cm}$

21. Alternativa e.

22. a) Resposta esperada: Os pais do menino estavam conversando sobre uma diminuição brusca na medida de temperatura e queriam avisá-lo para que ele pudesse se prevenir. O menino entendeu que ele havia derrubado algum objeto na casa e seria castigado por isso.

b) Resposta esperada: Essas associações são feitas porque, nos termômetros de álcool colorido, a medida de comprimento da coluna de álcool diminui ou aumenta; isso passa uma falsa sensação de que a temperatura abaixa ou sobe.

c) Resposta pessoal.

23. a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = -2x + 5$

24. R\$ 13,00 por dia.

25. a) $S(t) = 6 + 5t$ c) 5 metros por segundo.

b) 100 m

d) Resposta pessoal.

26. a) $f(x) = 8 + 0,50x$

b) 0,50 e $f(0) = 8$.

c) R\$ 58,00

27. a) Retângulo

Medida de comprimento da largura (em cm)	Medida de perímetro (em cm)
1	12
1,5	13
2	14
3	16
4	18

Tabela elaborada para fins didáticos.

b) $f(x) = 10 + 2x$

c) 2 e 10, respectivamente.

28. Alternativa b.

29. a) $f_A(x) = 50 + 0,37x$; $f_B(x) = 63 + 0,37x$;
 $f_C(x) = 75 + 0,37x$.

b) 0,37 em todas as funções.

30. a) $f(t) = 10 + 5t$ c) 10

b) 5 d) Resposta pessoal.

31. $\ell = \frac{11}{8500}C + \frac{32483}{425}$

32. $698 \mu\text{g}/\text{m}^3$

33. a) $c = 0,10x$ c) R\$ 1.250,00. R\$ 6.000,00.

b) $c = 0,05x$

34. Aproximadamente 90°C ; aproximadamente $101,43^\circ \text{C}$.

35. a) Sala A: 20°C ; sala B: 21°C .

b) 20 min

36. a) $V = \frac{5}{3}t + 455$ b) -273°C

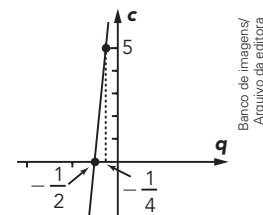
37. 500 m/s^2

38. a) $C(x) = 6x + 10400$ b) R\$ 17.600,00

39. a) $v = 60 \text{ m/s}$ c) 700 m

b) $S = 60t + 100$ d) 15 s

40.



41. Alternativa c.

42. a) Exemplo de resposta.

Pentágono regular

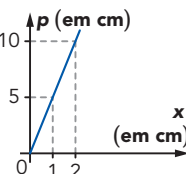
Medida de comprimento do lado (x)	Medida de perímetro (p)
1,0 cm	5 cm
1,5 cm	7,5 cm
2,0 cm	10,0 cm
2,5 cm	12,5 cm

Tabela elaborada para fins didáticos.

b) A medida de perímetro dobra e triplica, respectivamente.

c) $p(x) = 5x$

d) $p(\text{em cm})$



e) Variação linear ou constante.

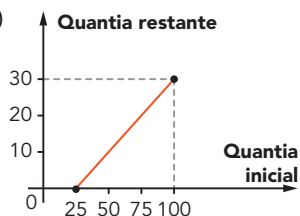
f) Sim. Não.

43.a) $Q = \frac{2x}{5} - 10$

b) R\$ 6,00

c) R\$ 36,00

d)



44.a) $v = 10 \text{ m/s}$

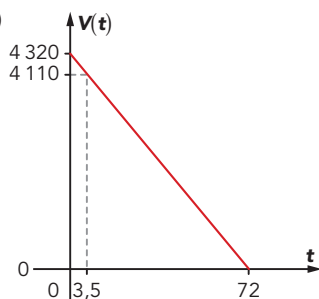
b) $S = 10t + 10$

c) 40 m

45.a) 4110 L

b) 72 h

c)



d) Resposta pessoal.

46. Alternativa d.

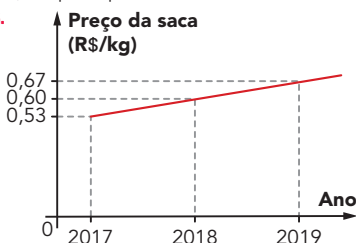
47.a) 0,853 kg/L

b) $k = 5$

c) $y = 0,853x$

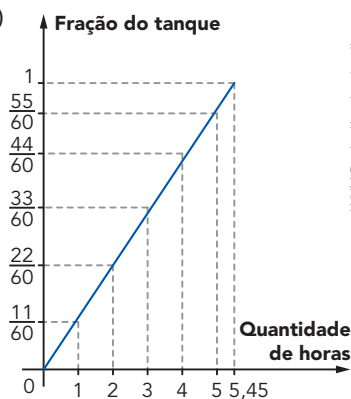
d) Resposta pessoal.

48.



49.a) $\frac{11}{60}, \frac{22}{60}, \frac{33}{60}, \frac{44}{60}, \frac{55}{60}$

b)



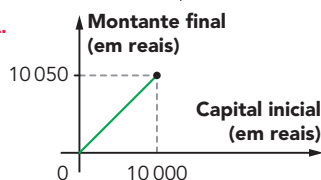
50.a) $f(x) = 50x$

b) Sim.

c) Sim.

d) Não. Pois, por exemplo, o lucro na venda de 10 livros é de R\$ 300,00 ($L(10) = 300$), mas, dobrando o número de livros vendidos, obtém-se um lucro de R\$ 1.000,00 ($L(20) = 800$), que não é o dobro de R\$ 300,00.

51.



52.a) O domínio é o intervalo $[0, 10]$.

b) Sim.

c) 3,575

d) Não. É impossível a escola alcançar a meta mantendo a taxa de aprovação em 55%.

e) Exemplo de resposta: Se o Ideb fosse apenas o subíndice N , então ele seria a média das notas de Língua Portuguesa e de Matemática, ignorando a taxa de aprovação. Dessa maneira, uma unidade escolar poderia ter alto Ideb, mas ter baixa taxa de aprovação, o que significa que poucos estudantes concluem a etapa de ensino no período ideal. De maneira análoga, se o Ideb fosse apenas o subíndice P , uma unidade escolar poderia ter Ideb alto (se tivesse alta taxa de aprovação), mas com notas médias irrisórias, o que significa que os estudantes são aprovados, mas com baixo aproveitamento.

53. Resposta pessoal.

54.a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -14\}$

55.a) $f(x) = 5x - 230$

b) $x < 46$; o comerciante terá prejuízo se vender menos de 46 unidades.

c) $x = 109$

d) $x > 102$

e) $66 < x < 82$

56.a) Plano A: $f(x) = 50x + 100$;
plano B: $g(x) = 40x + 180$.

b) O plano A, o que significa que o custo aumenta mais rapidamente no plano A.

c) O plano A é mais econômico para $x < 8$; o B, para $x > 8$; e eles são equivalentes para $x = 8$.

57.a) O plano C.

b) 50 minutos.

58. 60 minutos.

59. $x \geq 1500$

60. Alternativa d.

61.a) $f(0) = 5$

b) $f(-1) = 1$

c) $f(1) = 9$

d) $f(5) = 9$

e) $f(10) = 4$

f) $f(6) = 9$

62.a) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } x \leq 3 \\ x-1, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & \text{se } x < 1 \\ x-2, & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ 3, & \text{se } x > 5 \end{cases}$

63. $t(c) = \begin{cases} 23,57; & \text{se } c \leq 10 \\ -42,43 + 6,6c; & \text{se } 11 \leq c \leq 20 \\ -144,23 + 11,69c; & \text{se } 21 \leq c \leq 50 \\ -173,23 + 12,27c; & \text{se } c > 50 \end{cases}$

64. Alternativa c.

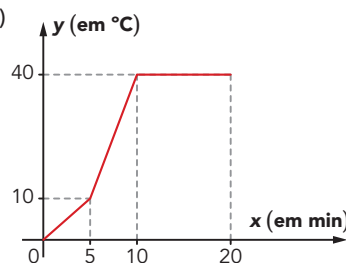
65.a) F

c) V

b) V

d) V

66.a)



b) $y = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ 6x - 20, & \text{se } 5 \leq x \leq 10 \\ 40, & \text{se } 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$

c) 4°C , 28°C , 40°C .

d) Em $[0, 5]$, pois se a medida de intervalo de tempo x , em minutos, é tal que $x \in [0, 5]$, então a medida de temperatura t , em graus Celsius, e a medida de intervalo de tempo decorrida x estão relacionados por uma função linear de lei $t(x) = 2x$.

67.a) 3 h

b) 3 h

c) 105 dB

68.a)



b) $0 < x \leq 1903,98$; $x \geq 1903,99$.

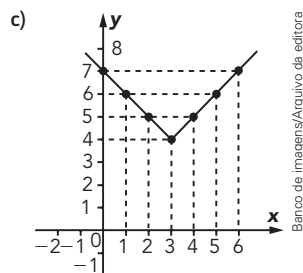
c) Para que os contribuintes de menor renda paguem valores menores de IRPF em relação ao salário bruto.

69.a) $f(x) = \begin{cases} -3x + 15, & \text{se } x < 5 \\ 3x - 15, & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$

b) $f(2) = 9$; $f(7) = 6$; $f(-1) = 18$; $f(5) = 0$.

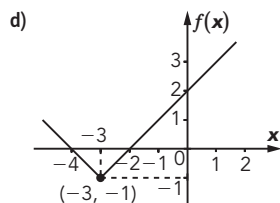
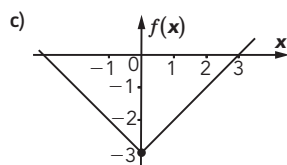
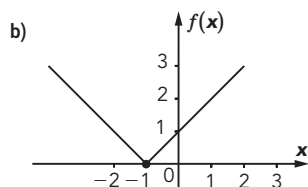
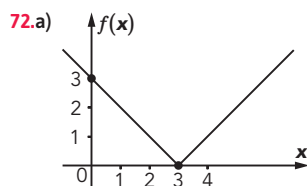
70.a) $f(8) = 9$; $f(-1) = 8$; $f(3) = 4$; $f(0) = 7$.

b) $f(x) = \begin{cases} 7-x, & \text{se } x < 3 \\ x+1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$



d) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$.

71. $f(x)$ é crescente para $x > 0$; $f(x)$ é decrescente para $x < 0$.



73. Alternativa a.

Vestibulares e Enem

1. Alternativa c.
2. Alternativa d.
3. Alternativa 05.
4. Alternativa a.
5. Alternativa b.
6. Alternativa e.
7. Alternativa d.
8. Alternativa c.
9. Alternativa b.
10. Alternativa a.
11. Alternativa c.
12. Alternativa b.
13. Alternativa b.
14. Alternativa a.
15. Alternativa d.
16. Alternativa d.

Capítulo 2: Função quadrática

Atividades

1. Resposta pessoal.
2. As dos itens a e d.
3. a) Para t real e diferente de zero.
b) Para $t = 2$.
4. a) $a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$
b) $a = 2$, $b = -12$ e $c = 23$
c) $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$
d) $a = 12$, $b = 13$ e $c = -14$
e) $a = 10$, $b = 13$ e $c = -3$

5.a)

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0	-2	-8	-18	-32	-50

b)

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0	-2	2	12	28	50

6.a) $A(10) = 100$; $A(1,5) = 2,25$;

$$A(2\sqrt{3}) = 12.$$

b) $\ell = 16$

7.a) $25\pi \text{ cm}^2$

b)

Início

Nomeie de A a medida de área de um círculo

$$\text{Crie } R \leftarrow \frac{A}{\pi}$$

$$\text{Crie } r \leftarrow \sqrt{R}$$

Saída: r

Fim

c) 8 m

8.a) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + 6$

b) $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$ e $c = 6$.

c) Não é possível, pois não se sabe o valor de x.

9.a)

Entrada (x)	Saída (A)
-3	3
-2	0
-1	-1
0	0
1	3
2	8
3	15

b) $f(x) = x^2 + 2x$

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

10.a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{25}{4}$; $\frac{5}{2}$; 2; $2^2 + 2 = 6$.

b) $x = 7$

11.a) 3 e 0.

b) Não tem zeros reais.

c) -2 e 4.

d) -5

e) 4

f) Não tem zeros reais.

12. Alternativa c.

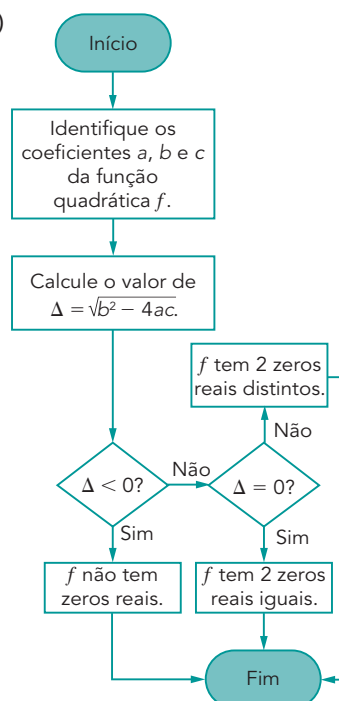
13. Alternativa b.

14. Alternativa b.

15.a) Identifique os valores dos coeficientes a, b e c da função quadrática f. Calcule o valor de Δ .

b) Sim. Pergunta: " $\Delta < 0$?" e " $\Delta = 0$?". As respostas possíveis são "sim" e "não" em ambos os casos.

c)



16.a) $(x - 1)^2 - 1 = 0$ b) $(x + 3)^2 - 25 = 0$

17.a) -3 e -7.

b) 3 e -1.

18.a) -1 e 5.

b) -3 e 1.

19.a) Não é possível definir.

b) $c = -16$

c) $f(x) = x^2 + 6x + 16$, $x_2 = -8$.

20. 10

21. $\frac{13}{12}$

22.a) $L(d) = R(d) - D(d)$

b) 6 e 24 de setembro.

23. Alternativa d.

24.a) A equação é $\Delta S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$, em que

ΔS é a medida de distância percorrida, a é a medida de aceleração do carro, V_0 é a medida de velocidade inicial e t é a medida de intervalo de tempo.

b) $100 = 20t - t^2 \Rightarrow 147 = 2t^2 - 40t + 347$

c) Resposta pessoal.

25. Alternativa b. 26. 4 amigos.

27.a) É diretamente proporcional.

b) Não é diretamente proporcional.

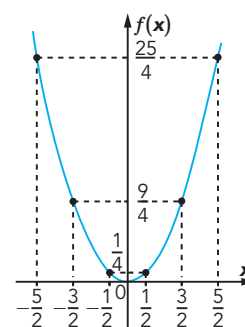
c) É diretamente proporcional.

d) Não é diretamente proporcional.

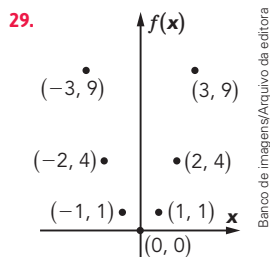
e) É diretamente proporcional.

f) Não é diretamente proporcional.

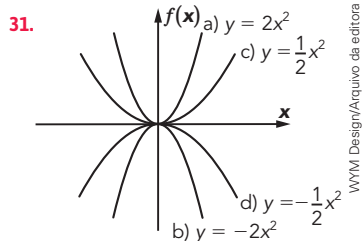
28. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$; $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$.



Banco de Imagens/Arquivo da editora



30. Resposta pessoal.



32. Alternativas a e c.

33. $m = -\frac{1}{2}$

34. a) Eixo x: (5, 0) e (6, 0); eixo y: (0, 30).
 b) Eixo x: (3, 0) e (-7, 0); eixo y: (0, -21).
 c) Eixo x: (6, 0) e (-6, 0); eixo y: (0, -36).
 d) Eixo x: $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(\frac{1}{3}, 0)$; eixo y: (0, 1).

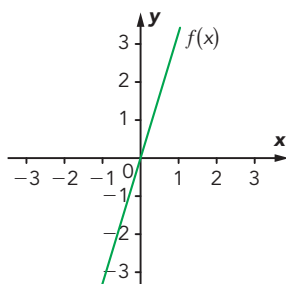
35. a) $a < 0, \Delta > 0$.
 b) $a > 0, \Delta > 0$.
 c) $a > 0, \Delta < 0$.
 d) $a < 0, \Delta = 0$.
 e) $a < 0, \Delta < 0$.
 f) $a > 0, \Delta = 0$.

36. Alternativa b.

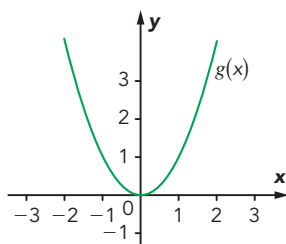
37. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

38. a) $a < 0, b < 0$ e $c > 0$.
 b) $a > 0, b > 0$ e $c < 0$.
 c) $a < 0, b > 0$ e $c = 0$.

39. a) $f(x) = 4x$. Essa é uma função afim.



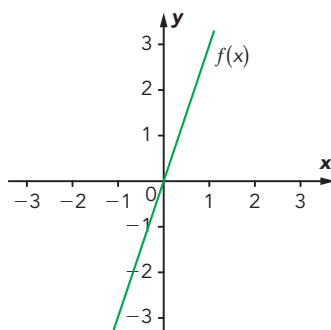
b) $g(x) = x^2$. Essa é uma função quadrática.



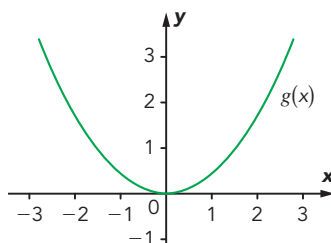
c) Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada. Triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.

d) Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2 .

40. a) $f(x) = 3x$. Essa é uma função afim.



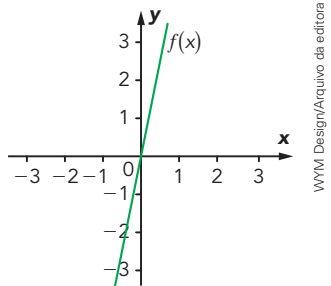
b) $g(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Essa é uma função quadrática.



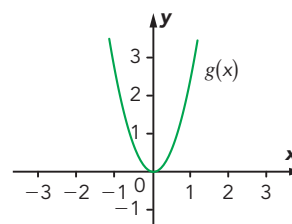
c) Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada. Triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.

d) Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2 .

41. a) $f(x) = 6x$. Essa é uma função afim.



b) $g(x) = \frac{x^2 3\sqrt{3}}{2}$. Essa é uma função quadrática.



c) Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada.

Triplcando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.

d) Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2 .

42. a) $\sqrt{0, 1}$

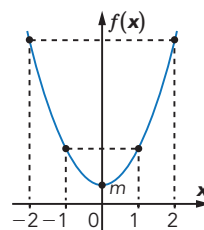
b) $\sqrt{0, 2}$

c) $\sqrt{0, -1}$

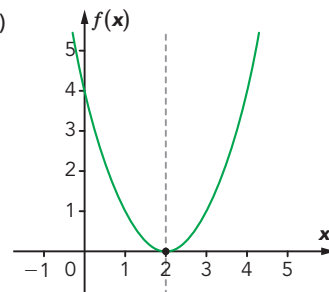
d) $\sqrt{0, -1}$

43. Valor mínimo: $f(x) \rightarrow 1, h(x) \rightarrow -1, j(x) \rightarrow -1$; valor máximo: $g(x) \rightarrow 2$.

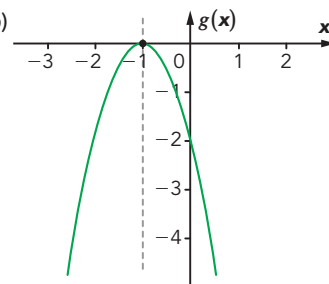
44.



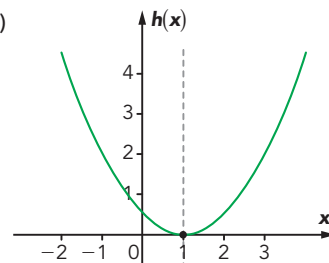
45. a)

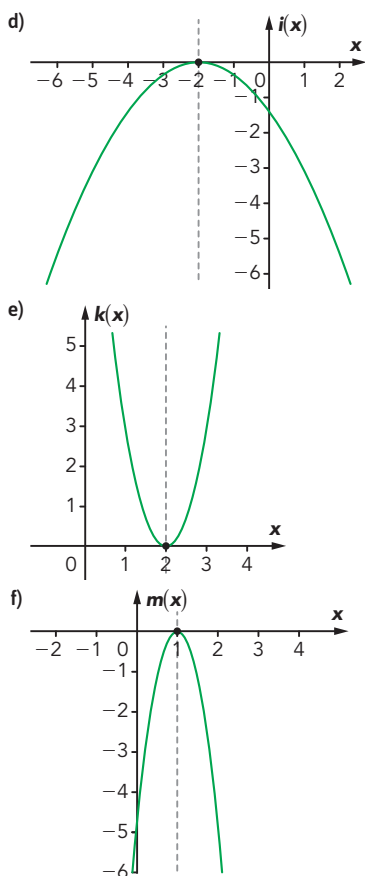


b)



c)





Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

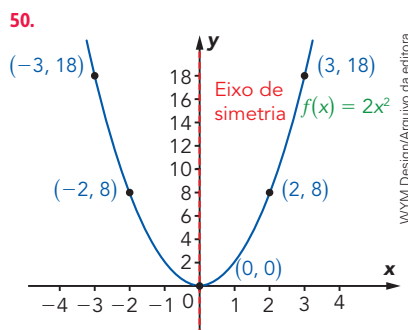
- 46.a) g, j e m . b) f, h e k .
- c) Esses pontos são os vértices das parábolas. $V_f(2, 0)$; $V_g(-1, 0)$; $V_h(1, 0)$; $V_j(-2, 0)$; $V_k(2, 0)$; $V_m(1, 0)$.
- 47.a) Ele é deslocado 2 unidades para a direita.
b) Ele é deslocado 2 unidades para a esquerda.
c) $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.
- 48.a) $y = x^2 \Rightarrow V(0, 0)$; $y = (x - 2)^2 + 3 \Rightarrow V(2, 3)$; $y = (x + 2)^2 - 3 \Rightarrow V(-2, -3)$.
b) Ele é deslocado 3 unidades para cima e 2 unidades para a direita.
c) Ele é deslocado 3 unidades para baixo e 2 unidades para a esquerda.
d) Ele é deslocado k unidades para baixo e m unidades para a direita, se $k > 0$ e $m > 0$.
Ele é deslocado k unidades para cima e m unidades para a direita, se $k < 0$ e $m > 0$.

Ele é deslocado k unidades para baixo e m unidades para a esquerda, se $k > 0$ e $m < 0$.
Ele é deslocado k unidades para cima e m unidades para a esquerda, se $k < 0$ e $m < 0$.
e) Resposta pessoal.

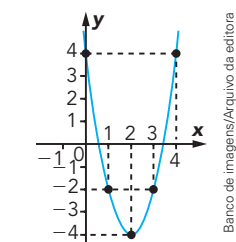
49.a)
$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-2b}{2a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-b}{2a}$$

b)
$$y_v = ax_v^2 + bx_v + c = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$



- $f(x) = 2x^2$
- 51.a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
b) $f(x) = x^2 + 2$
c) $f(x) = -x^2 + 4x$
52. Alternativa b.



53. 1 segundo.

- 54.a) 40 unidades.
b) R\$ 1.400,00
55.a) 2 s
b) 10 m
c) 310 s

56. 15 passageiros.

57. Alternativa c.

58.a) 2 min e 6 min

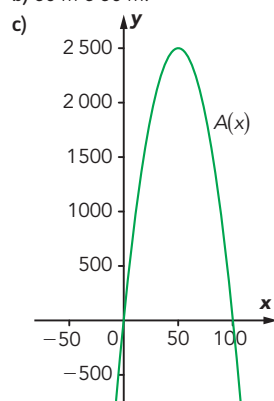
b) 4 min

c) -4°C

d) 32°C

59.a) $A(x) = 100x - x^2$

b) 50 m e 50 m.



60. 32 m^2

61. R\$ 12,00

62.a) 230 mil.

b) Exemplo de resposta: Qual é a velocidade máxima de disseminação quando $k = 0,5$?

63. Alternativa a.

64. Alternativa b.

Vestibulares e Enem

1. Alternativa d.

2. Alternativa e.

3. Alternativa c.

4. Alternativa a.

5. Alternativa b.

6. Alternativa a.

7. Alternativa c.

8. Alternativa b.

9. Alternativa b.

10. Alternativa e.

11. Alternativa d.

12. Alternativa d.

Lista de siglas das atividades extraídas de provas oficiais

Acafe-SC: Associação Catarinense das Fundações Educacionais (Santa Catarina)

EEM-SP: Escola de Engenharia de Mauá (São Paulo)

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

ESCS-DF: Escola Superior de Ciências da Saúde (Distrito Federal)

ESPM-RJ: Escola Superior de Propaganda e Marketing (Rio de Janeiro)

FGV-RJ: Fundação Getúlio Vargas (Rio de Janeiro)

IFBA: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

IFPE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco

Ifsul-RS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense (Rio Grande do Sul)

UCB-DF: Universidade Católica de Brasília (Distrito Federal)

UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas

UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás

Uepa: Universidade do Estado do Pará

UFCE: Universidade Federal do Ceará

UFMS: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFT-TO: Universidade Federal do Tocantins

Uncisal: Universidade Estadual de Ciências da Saúde de Alagoas

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)

Unipe-PB: Centro de Ensino Superior do IPE (Paraíba)

UnirG-TO: Universidade de Gurupi (Tocantins)

UPE: Universidade de Pernambuco

Unesp: Fundação para o Vestibular da Unesp

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC é um documento normativo do Ministério da Educação, em parceria com o Conselho Nacional de Secretários de Educação (Consed) e a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (Undime), que estabelece as aprendizagens essenciais a todos os estudantes ao longo das etapas da Educação Básica, de modo a garantir os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. A Educação Básica compreende as etapas da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

A partir da homologação, a BNCC passou a ser a referência nacional para a elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas dos sistemas de ensino e das escolas, bem como para a concepção dos livros didáticos. Para que isso seja possível, o documento institui **competências gerais** para a Educação Básica, que se articulam para a construção dos conhecimentos e para o desenvolvimento das **competências específicas** e das **habilidades** previstas para cada etapa e área do conhecimento.

Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC (BRASIL, 2018, p. 13).

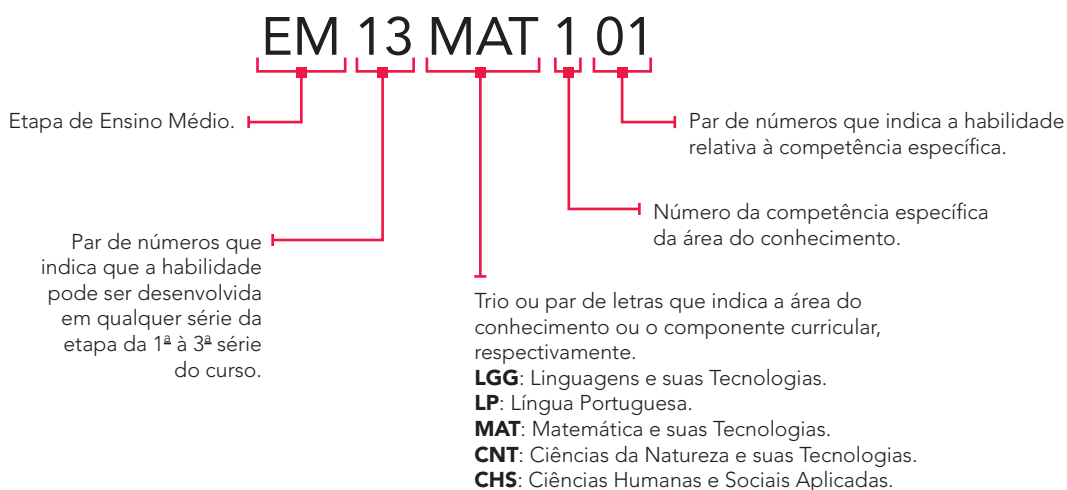
As competências específicas do Ensino Médio se articulam com as já desenvolvidas no Ensino Fundamental, com as adequações e ampliações necessárias às especificidades de formação dos estudantes dessa etapa,

garantindo a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos anteriormente. No Ensino Médio, a organização das habilidades das áreas de conhecimento não é seriada, o que permite aos sistemas de ensino e às escolas estabelecer propostas pedagógicas **flexíveis** e adequadas à realidade dos estudantes, ou seja, à realidade de cada um de vocês. Além disso, essa organização garante o **protagonismo** do próprio processo de aprendizagem, em sintonia com os percursos e as histórias já vivenciados, o que permite desenvolver uma **educação integral** e definir os **projetos de vida** nos âmbitos dos estudos, do trabalho e das escolhas de estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos.

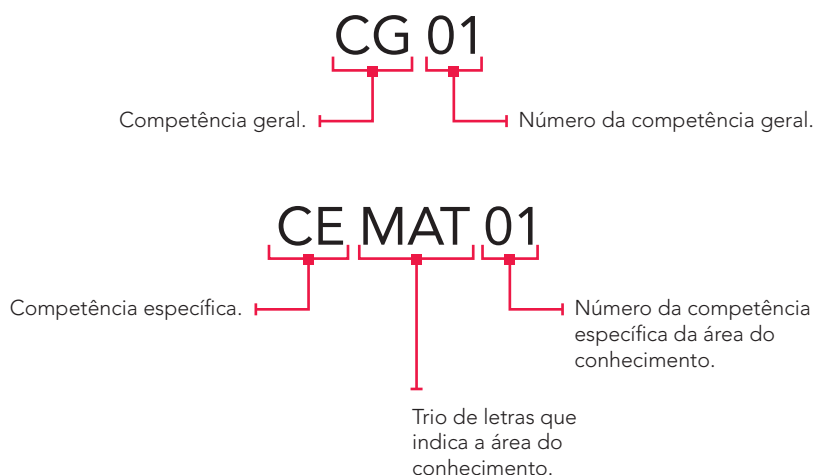
Veja como deve ocorrer, de acordo com a BNCC, a progressão das aprendizagens na área de Matemática e suas Tecnologias.

A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2018, p. 471).

Conheça agora os códigos alfanuméricos que indicam as habilidades da etapa do Ensino Médio, usando uma habilidade de Matemática e suas Tecnologias como exemplo.



De maneira análoga, nesta coleção, indicamos códigos para as competências gerais e as competências específicas de cada área do conhecimento.



Agora que você já conhece um pouco a BNCC, é importante que tenha consciência de quais são as dez competências gerais presentes ao longo dos seis volumes desta coleção, bem como de todas as competências específicas e das habilidades de Matemática e suas Tecnologias que são favorecidas nos volumes.

Competências gerais

Conheça as dez competências gerais da BNCC e os códigos que utilizamos nesta coleção.

CG01: Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

CG02: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

CG03: Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

CG04: Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

CG05: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

CG06: Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

CG07: Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

CG08: Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

CG09: Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

CG10: Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

Conheça também as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias e os códigos que utilizamos nesta coleção.

CEMAT01: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

EM13MAT101: Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT102: Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

EM13MAT103: Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

EM13MAT104: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

EM13MAT105: Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

EM13MAT106: Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

CEMAT02: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

EM13MAT201: Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

EM13MAT202: Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

EM13MAT203: Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

CEMAT03: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

EM13MAT301: Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT302: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1ª ou 2ª graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT303: Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

EM13MAT304: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

EM13MAT305: Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

EM13MAT306: Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

EM13MAT307: Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT308: Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

EM13MAT309: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT310: Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

EM13MAT311: Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

EM13MAT312: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

EM13MAT313: Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

EM13MAT314: Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

EM13MAT315: Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

EM13MAT316: Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

CEMAT04: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

EM13MAT401: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

EM13MAT402: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

EM13MAT403: Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

EM13MAT404: Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decréscimo, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT405: Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

EM13MAT406: Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

EM13MAT407: Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

CEMAT05: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

EM13MAT501: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

EM13MAT502: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

EM13MAT503: Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT504: Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

EM13MAT505: Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

EM13MAT506: Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

EM13MAT507: Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT508: Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT509: Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

EM13MAT510: Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

EM13MAT511: Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Competências específicas e habilidades de outras áreas do conhecimento

Nesta coleção, diversos conteúdos, atividades e seções favorecem o desenvolvimento de competências específicas e habilidades de outras áreas do conhecimento, em conjunto com as de Matemática. Conheça quais foram favorecidas neste volume.

Linguagens e suas Tecnologias

CELGG06: Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.

EM13LGG602: Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

CELGG07: Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.

EM13LGG701: Explorar tecnologias digitais da informação e comunicação (TDIC), compreendendo seus princípios e funcionalidades, e utilizá-las de modo ético, criativo, responsável e adequado a práticas de linguagem em diferentes contextos.

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

CECNT01: Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

EM13CNT102: Realizar previsões, avaliar intervenções e/ou construir protótipos de sistemas térmicos que visem à sustentabilidade, considerando sua composição e os efeitos das variáveis termodinâmicas sobre seu funcionamento, considerando também o uso de tecnologias digitais que auxiliem no cálculo de estimativas e no apoio à construção dos protótipos.

EM13CNT106: Avaliar, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais, tecnologias e possíveis soluções para as demandas que envolvem a geração, o transporte, a distribuição e o consumo de energia elétrica, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo/benefício, as características geográficas e ambientais, a produção de resíduos e os impactos socioambientais e culturais.

EM13CNT107: Realizar previsões qualitativas e quantitativas sobre o funcionamento de geradores, motores elétricos e seus componentes, bobinas, transformadores, pilhas, baterias e dispositivos eletrônicos, com base na análise dos processos de transformação e condução de energia envolvidos – com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais –, para propor ações que visem a sustentabilidade.

CECNT02: Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

EM13CNT202: Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

EM13CNT203: Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

EM13CNT204: Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

CECNT03: Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

EM13CNT308: Investigar e analisar o funcionamento de equipamentos elétricos e/ou eletrônicos e sistemas de automação para compreender as tecnologias contemporâneas e avaliar seus impactos sociais, culturais e ambientais.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

CECHS01: Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.

EM13CHS101: Identificar, analisar e comparar diferentes fontes e narrativas expressas em diversas linguagens, com vistas à compreensão de ideias filosóficas e de processos e eventos históricos, geográficos, políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais.

EM13CHS106: Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Referências bibliográficas comentadas

Para a concepção desta coleção, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e sites foram consultados de modo a trazer materiais atualizados e que visam dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste volume.

ÁVILA, G. *Cálculo das funções de uma variável*. 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos (LTC), 2003.

O autor apresenta o conceito de função, muito importante na Matemática e assunto principal deste volume. Ele aborda também as definições de domínio, contradomínio e imagem. A obra traz construções de gráficos das funções afim e quadrática, assuntos principais dos capítulos 1 e 2 deste volume.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher: Edusp, 1974.

O autor apresenta e explica aspectos da história da Matemática, considerando a ordem cronológica e local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. Ao longo dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. Essa obra foi utilizada como referência para dados históricos apresentados neste volume.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

Este documento, conhecido como BNCC, determina as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem adquirir ao longo de todos os anos da Educação Básica. Essas aprendizagens estão organizadas em competências e habilidades para estudantes de todo o país. De maneira geral, todos os volumes desta coleção foram concebidos de acordo com as orientações da BNCC. Nas páginas iniciais de cada volume há a explanação de como o documento norteia a construção da coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC: proposta de práticas de implementação*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019.

Os Temas Contemporâneos Transversais devem ser incorporados às propostas pedagógicas escolares, garantindo aos estudantes os direitos de aprendizagem, de maneira transversal. Esses dois documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação depois da homologação da BNCC, com o objetivo de explanar o trabalho com esses temas. Esses documentos serviram de referencial para a concepção desta coleção.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil: adolescência, educação e participação democrática*. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

O autor apresenta a história do conceito de protagonismo juvenil, além de depoimentos de estudantes e de outros pesquisadores da área. A obra propõe que o processo educativo seja organizado com o jovem como núcleo central – perspectiva que faz parte do projeto didático de todos os volumes desta coleção.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1).

O autor traz uma análise entre a relação entre Matemática e Etnomatemática, ressaltando a importância da Etnomatemática no ensino ocidental, além de apresentar resultados de pesquisas do mundo todo na área. Essa obra foi utilizada como referencial teórico para a concepção dessa coleção.

KARLSON, P. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

O autor apresenta de maneira cronológica a construção do conhecimento matemático que ocorreu em diversos países e regiões do planeta. Além disso, ele traz problemas e curiosidades que enriquecem a leitura. A obra foi utilizada como fonte de consulta para alguns dados históricos do capítulo 2 deste volume.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda., 1994. v. 1.

Esta obra aborda aspectos do ensino de Cálculo e Geometria analítica. O tópico destinado a funções e os gráficos delas foram muito úteis para a elaboração dos capítulos deste volume. As funções afins, quadráticas, modulares e por partes são apresentadas com o rigor necessário, seguidas de atividades resolvidas.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WÁGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

A obra aborda, principalmente, a elaboração e a resolução de problemas, considerando público-alvo os estudantes do Ensino Médio. É evidenciada a importância de existir precisão nas definições, nos enunciados e nas resoluções das atividades, e de contextualizar os tópicos de Matemática, promovendo a interdisciplinaridade no estudo das funções afins e quadráticas. Esse livro foi consultado na elaboração dos capítulos deste volume, principalmente como inspiração para a criação dos contextos apresentados.

LIRA JÚNIOR, J. Q. *Ensino de função afim: uma aplicação mediada pelo GeoGebra*. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Pará, 2015.

O autor apresenta, de modo detalhado, a utilização de um software de Geometria dinâmica, o GeoGebra, na representação de uma função afim. O estudo da influência da taxa de variação e do coeficiente linear na função $f(x) = ax + b$ é analisado e representado no programa. A obra também apresenta o estudo da função afim em problemas como o cálculo do imposto de renda e da conta de energia elétrica. Esse livro foi consultado na concepção das seções que utilizam o GeoGebra e como inspiração na elaboração de problemas no capítulo 1 deste volume.

MARTINS, F. A. O. *Explorando algumas curvas notáveis no Ensino Médio: história, propriedades e aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Colégio Pedro II, Rio de Janeiro-RJ, 2019.

O autor analisa algumas curvas, como circunferência, elipse, hipérbole, parábola e catenária. Ele ressalta que, há muito tempo, é comum encontrar conclusões erradas sobre o problema da “corrente suspensa”, que confundem a catenária com a parábola. São apresentados o contexto histórico desse problema e alguns matemáticos, como Galileu Galilei e Christian Huygens, que procuraram soluções para ele. Essa obra foi consultada na elaboração do capítulo 2 deste volume.

MATTOS, J. R. L.; POLEGATTI, G. A. Um encontro etnomatemático na educação escolar indígena: a função das flautas dos Rikbaktsa. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Curitiba, 2013.

Os autores apresentam alguns aspectos da organização social e escolar dos Rikbaktsa, evidenciando o estudo da função afim por meio da análise das flautas produzidas na própria comunidade. O artigo aborda a dificuldade dos alunos indígenas em entender conceitos matemáticos contextualizados em situações que não fazem parte do cotidiano deles. Essa reflexão é apresentada em uma seção do capítulo 1 deste volume.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1986.

A obra traz diversas estratégias e ferramentas fundamentais para a resolução de problemas, apresentando as quatro fases de resolução: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. O autor inicia o livro afirmando que: “Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema”. Essa obra serviu de inspiração para a elaboração de situações, problemas e propostas de soluções que compõem este volume.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBM, v. 41, 1999.

O artigo da revista intitulado “Vértices de famílias de parábola”, de Aguinaldo Robinson de Souza, Leonardo Paulovich e Mauri Cunha do Nascimento, explica, de maneira detalhada, o comportamento dos vértices das parábolas de uma família dada por $y = ax^2 + bx + c$, variando cada um dos coeficientes (a , b e c) individualmente. Esse artigo foi utilizado como inspiração na criação de atividades com softwares de Geometria dinâmica no capítulo 2 deste volume.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBM, v. 63, 2007.

O artigo intitulado “Grandezas físicas para exemplificar a função”, de Ricardo Avelar Sotomaior Karam, apresenta grandezas físicas para contextualizar a função afim, de maneira que as situações permitem ao estudante fazer a conexão entre a Matemática e a Física. Os problemas de cinemática e mecâni-

ca abordados pelo autor, bem como os tópicos de proporcionalidade, taxa de variação, gráficos e modelagem matemática, serviram como inspiração para a elaboração de problemas e situações no capítulo 1 deste volume.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

A autora apresenta, em ordem cronológica, fatos da história da Matemática sob um olhar crítico, analisando mitos e lendas perpetuados por muito tempo. A obra começa abordando conceitos matemáticos desenvolvidos na Mesopotâmia, passando por Egito, Grécia, França e Alemanha. É o primeiro livro brasileiro a retratar a história da Matemática e foi utilizado como referência para o desenvolvimento da fórmula para calcular as raízes de uma equação de 2ª grau no capítulo 2 deste volume.

SOUSA, R. M. *O uso do GeoGebra no ensino da função quadrática*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2014.

A dissertação apresenta um breve histórico sobre a Matemática, a equação de 2ª grau e a função quadrática. É ressaltada também a importância dos recursos computacionais para o ensino da função quadrática, bem como a aplicação dela em outras ciências e na Geometria plana. Através do software GeoGebra é discutida a influência dos coeficientes a , b e c na função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Essa dissertação foi usada como inspiração para a criação das atividades que utilizam o software de Geometria dinâmica no capítulo 2 deste volume.

STEWART, J. *Cálculo*. Tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. II.

O livro apresenta os tópicos de função afim e quadrática, utilizando definições precisas e ressaltando a interdisciplinaridade com outros campos do saber. O processo de modelagem matemática é apresentado em três etapas: formulação, resolução e interpretação. Essa obra foi consultada na concepção dos capítulos 1 e 2 deste volume.

WING, J. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 9, n. 2, 2016.

O artigo apresenta a tradução do trabalho *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing, feita por Cleverson Sebastião dos Anjos, que é professor de Informática no Instituto Federal do Paraná (UFPR). Nele são apresentadas ideias sobre o pensamento computacional, tema abordado em seções e atividades deste volume.



MANUAL DO PROFESSOR

Matemática e suas Tecnologias

Apresentação

Olá, professor,

Este Manual do professor foi elaborado com o objetivo de auxiliar você no desenvolvimento de seu trabalho com esta coleção.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sem dúvida, apontou novos caminhos para a educação brasileira, propondo que todos os estudantes tenham acesso às mesmas aprendizagens e que elas sejam desenvolvidas integrando experiências pessoais e experiências sociais aos conhecimentos adquiridos tanto no espaço escolar quanto fora dele.

Nesse sentido, faz-se necessário que todo seu trabalho esteja alicerçado na construção colaborativa de significados para vários contextos da vida cotidiana.

Para isso, você vai precisar seguir por um novo caminho, o de mediador e promotor de um processo de ensino e aprendizagem interdisciplinar e integrado no qual cada estudante é protagonista das próprias aprendizagens. Essa integração das áreas do conhecimento e campos de saber é importante para que os jovens do Ensino Médio ampliem a visão de mundo e, assim, elaborem argumentos mais consistentes para se posicionarem com pensamento crítico e criatividade.

O Novo Ensino Médio propõe um modelo mais participativo no qual você vai colaborar mais com os professores de outros campos de saber e eles com você. Todo o corpo docente vai trocar e compartilhar mais ainda nesse novo modelo.

Essa postura de compartilhamento precisa se estender aos estudantes, considerando a escuta ativa das ideias que eles expuserem.

É tempo de escutar, compartilhar, inspirar e criar juntos.

E como enfrentar com passos seguros esses novos caminhos? E agora?

Essas dúvidas devem estar em seus pensamentos neste momento, não é mesmo?

Para encontrar mais segurança nesses novos caminhos, convidamos você a seguir com os volumes desta coleção.

Siga conosco nesta etapa de ensino, tão importante para a vida dos jovens, o Ensino Médio!

Os autores

Sumário

Orientações gerais

Orientações gerais	140
O Novo Ensino Médio	140
O docente como mediador do trabalho por área do conhecimento	141
As culturas juvenis e os estudantes como sujeitos autônomos dos próprios projetos de vida	143
A BNCC e a educação integral	144
As 10 competências gerais	144
As competências específicas e as habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias	146
Educação por competências: integração entre conhecimentos, habilidades, atitudes e valores	147
Abordagens teórico-metodológicas	148
Resolução de problemas	148
Elaboração de problemas	151
Argumentação (oral e escrita), leitura inferencial e análises (críticas, criativas e propositivas)	152
Investigação científica	154
Pensamento computacional	155
Uso pedagógico de tecnologias digitais	158
Etnomatemática	159
Pluralismo de ideias e convívio social republicano	160
Cultura de Paz e saúde mental dos estudantes	161
Temas Contemporâneos Transversais	162
Avaliação em Matemática:	
Como e o que avaliar?	163
Os volumes desta coleção da área de Matemática e suas Tecnologias	165
Como os volumes do Livro do Estudante estão organizados	165

Como cada volume do Livro do Estudante está organizado	166
Referências complementares para aprofundamento	170
Sites e jogos	170
Podcasts e vídeos	171
Softwares	171
Revistas e boletins de Educação matemática	171
Livros	172

Orientações específicas

A BNCC neste volume	175
Capítulo 1: Função afim	177
Objetivos	178
Justificativa	179
Sugestões para o desenvolvimento das aulas	179
Capítulo 2: Função quadrática	190
Objetivos	191
Justificativa	191
Sugestões para o desenvolvimento das aulas	191
Resoluções do volume	200
Capítulo 1: Função afim	200
Capítulo 2: Função quadrática	215

Referências bibliográficas comentadas

Orientações gerais

O Novo Ensino Médio

A proposta do Novo Ensino Médio é, certamente, a maior mudança das últimas décadas da história da educação brasileira.

A determinação de uma formação básica comum alicerçada em conteúdos mínimos, conforme institui a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), já havia sido vislumbrada na Constituição Federativa de 1988 (artigo 210) e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394/1996, artigo 9º, inciso IV). Na LDB, Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394/1996, artigo 9º, inciso I), também se previa a elaboração de um Plano Nacional de Educação (PNE) e, nesse plano, publicado em 2014, também tais mudanças foram traçadas como metas a serem atingidas.

E muitos se perguntam: Era mesmo necessário mudar a educação brasileira?

Sim. Isso porque vivemos uma era de muitas transformações, um período em que todas as informações circulam muito rapidamente. Assim, os estudantes que frequentam atualmente as escolas nasceram em um mundo já conectado pela internet. Logo, não dependem apenas da escola e dos professores para obter novos conhecimentos, dispondo de recursos que lhes permitem ter acesso à informação ao alcance das mãos e de alguns cliques.

Há nas escolas uma geração de estudantes que aprendem, produzem, publicam e divulgam ideias próprias em várias plataformas e redes digitais. Todos esses novos padrões de comportamento exigem uma nova postura não apenas dos professores, mas também das instituições escolares e dos livros didáticos.

A escola precisa estar preparada para esse novo estudante, que é muito mais ativo, ágil e protagonista, a fim de orientar essa dinamicidade na descoberta e na eleição das melhores referências para a escolha acertada de melhores caminhos futuros. Sejam os caminhos acadêmicos, como o ingresso no Ensino Superior, sejam os caminhos profissionais, com a inserção futura no mercado de trabalho.

Constituição da República Federativa do Brasil de 1988

Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm.*

Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394/1996)

Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm.*

Plano Nacional de Educação (PNE)

Disponível em: http://pne.mec.gov.br/images/pdf/pne_conhecendo_20_metas.pdf.*

Monkey Business Images/Shutterstock



A computação e as tecnologias digitais de informação e comunicação podem ser caracterizadas pelas dimensões do pensamento computacional, do mundo digital e da cultura digital, que fazem parte, e devem fazer parte, das diferentes juventudes que compõem o Ensino Médio.

*Acesso em: 24 ago. 2020.

O Novo Ensino Médio foi estabelecido pela [Lei nº 13.415/2017](#). As [Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica](#) exibem normas para cada etapa de ensino e foram reformuladas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) de acordo com as propostas da Lei nº 13.415/2017. Essa reformulação foi validada pelo [Parecer aprovado no dia 8 de novembro de 2018](#), que originou a publicação da [Resolução nº 3](#).

Com o Novo Ensino Médio, ocorre mudança na carga horária, que foi ampliada para 3 000 horas, das quais 1 800 horas, no máximo, correspondem à formação geral básica e 1 200 horas correspondem, no mínimo, aos itinerários formativos. Além disso, o protagonismo juvenil é incentivado nos estudantes principalmente pelo incentivo e orientação na construção de projeto de vida.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

O site de divulgação do Novo Ensino Médio, desenvolvido pelo Ministério da Educação (MEC), reúne informações a respeito dessa etapa de ensino. Nele você encontra orientações para o processo de implementação das mudanças e pode fazer o [download](#) do *Guia de Implementação do Novo Ensino Médio*. Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/#!/marco-legal>. Acesso em: 24 ago. 2020.

Lei que institui o Novo Ensino Médio (Lei nº 13.415/2017)

Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm.*

Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica

Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file>.*

Parecer com atualização das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas na LDB pela Lei nº 13.415/2017

Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=102311-pceb003-18&category_slug=novembro-2018-pdf&Itemid=30192.*

Resolução no 3, de 21 de novembro de 2018

Disponível em: http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622.*

► O docente como mediador do trabalho por área do conhecimento

Vivemos em uma sociedade com farta presença de diferentes tecnologias. Essa realidade trouxe consigo não somente uma nova dinâmica à maneira de se comunicar, mas também de se informar e, especialmente, de ensinar e de aprender.

Diante de um conhecimento “descentralizado”, que flui em inúmeros meios e linguagens, seu papel como docente mudou: você deixa de atuar como um transmissor de conhecimentos para se tornar um mediador da diversidade de “oportunidades” que abarcam propostas com intencionalidades educativas.

Quando você assume esse comportamento, em que se coloca como incentivador e facilitador da aprendizagem, a relação professor-estudante estabelecida adquire característica nova: usar o conhecimento para “construir pontes” para os estudantes. Essa característica nova constitui a atitude principal de um docente que assume o papel de mediador.

Mediar não é o mesmo que ensinar. Isso porque uma das principais características da mediação é a compreensão de conceitos de modo que eles possam vir a ser aplicados em contextos e situações que vão muito além de possíveis avaliações escolares ou de exames em larga escala.

Se um conteúdo ou conceito é compreendido verdadeiramente, ele é assimilado profundamente e interliga-se a outros, já assimilados pelos estudantes, em uma grande teia de conexões em rede. Logo, o papel de mediar é precisamente o de contribuir de modo ativo para tais conexões e, desse modo, ampliar o processo de aprendizado.



FGC/Shutterstock

*Acesso em: 24 ago. 2020.

Planejar-se é um ponto principal a ser levado em conta para a realização de um trabalho alicerçado na mediação pedagógica. Planejamento é a palavra de ordem de um professor mediador. Organizar como distribuir os conteúdos que serão trabalhados, o modo como isso será feito, as atividades e as práticas, em razão do tempo e do uso dos materiais estabelecidos para esse trabalho, torna mais fácil a promoção de maneiras diversificadas de interação sua com os estudantes e de cada estudante com os colegas.

O professor mediador precisa ainda buscar promover a construção coletiva do conhecimento por meio do trabalho em grupo. Para isso, faz-se necessário considerar necessidades, interesses e conhecimentos prévios dos estudantes, bem como a diversidade de aspectos étnicos e culturais deles a fim de ampliar e enriquecer a qualidade das práticas educacionais. Também é importante levar em consideração as diferentes maneiras de como eles aprendem. Para isso, você pode fazer uso de propostas que envolvam diferentes metodologias ativas. Alguns tipos de metodologia ativa que podem ser explorados serão comentados no tópico seguinte.

E você pode estar se perguntando: E quais caminhos posso tomar para diversificar minhas estratégias didáticas e me tornar um professor mediador?

Para tanto, o ensino por competências, que será comentado em outro tópico mais adiante é, sem dúvida, uma das estratégias mais produtivas, uma vez que promove a autonomia e o protagonismo dos estudantes.

Mencionar “autonomia e protagonismo do estudante” não significa afirmar que os estudantes devam atuar isoladamente, sem interação professor-estudante ou estudante-estudante. A ênfase, nesse caso, está diretamente ligada à capacidade de cada um deles de gerenciamento do próprio aprendizado.

Portanto, permita que eles exponham ideias e apliquem de maneiras distintas o que estão estudando de modo que experimentem, debatam, reflitam e cheguem às conclusões próprias de como aplicar na vida o que aprendem na escola.

Essa dinâmica de atuação está diretamente ligada à avaliação como um processo contínuo de aquisição de informações. Graças à continuidade do processo de avaliação, torna-se possível a você um conhecimento mais amplo a respeito do desempenho dos estudantes e viabiliza-se a tomada de ações mais apropriadas e assertivas, que ajudem efetivamente a melhorar esse desempenho. Avaliar já não é, então, simplesmente qualificar ou examinar. Também abordaremos um tópico a respeito de avaliação nestas *Orientações gerais*.

O docente como mediador, ao contribuir para o desenvolvimento da autonomia e do protagonismo de

cada estudante, consequentemente, contribui para a formação de cidadãos críticos, participativos, capazes de fazer uma leitura consciente das situações que os cercam e engajados na transformação e no aperfeiçoamento do panorama social em que estão inseridos.

Metodologias ativas

Antes de apresentar comentários acerca de alguns tipos de metodologia ativa, é importante que você compreenda que, de acordo com Bacich & Moran (2018):

[...] as metodologias ativas constituem alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e de aprendizagem no aprendiz, envolvendo-o na aprendizagem por descoberta, investigação ou resolução de problemas.

[...]

As metodologias voltadas para a aprendizagem consistem em uma série de técnicas, procedimentos e processos utilizados pelos professores durante as aulas, a fim de auxiliar a aprendizagem dos alunos. O fato de elas serem ativas está relacionado com a realização de práticas pedagógicas para envolver os alunos, engajá-los em atividades práticas nas quais eles sejam protagonistas da sua aprendizagem. Assim, as metodologias ativas procuram criar situações de aprendizagem nas quais os aprendizes possam fazer coisas, pensar e conceituar o que fazem e construir conhecimentos sobre os conteúdos envolvidos nas atividades que realizam, bem como desenvolver a capacidade crítica, refletir sobre as práticas realizadas, fornecer e receber *feedback*, aprender a interagir com colegas e professor, além de explorar atitudes e valores pessoais.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 27-28.

Nesse sentido, ao utilizar uma metodologia ativa, o foco é que os estudantes aprendam fazendo, refletindo, reavaliando e dialogando com você, professor. As metodologias ativas voltadas para a aprendizagem envolvem procedimentos que você pode utilizar com eles antes, durante e depois das aulas a fim de favorecer a aprendizagem deles.

Acompanhe algumas descrições de metodologias ativas que podem ser adotadas no trabalho com os volumes desta coleção.

Aprendizagem baseada em problemas (PBL, do inglês *problem-based learning*): é proposto um problema mais amplo, geralmente transdisciplinar, em torno do qual temas de mais de um campo de saber são organizados para que competências específicas e habilidades de diferentes áreas de conhecimento sejam trabalhadas de modo integrado em níveis de

complexidade graduais. Nessa metodologia, ora os estudantes interagem individualmente, ora em grupos, fazem pesquisas e investigam determinados temas na busca de possíveis soluções para o problema.

Aprendizagem em equipe (TBL, do inglês *team-based learning*): é também um processo em que os estudantes aprendem de modo colaborativo, em equipes de cinco a sete membros com perfis variados, para atuar de modo permanente. Há aplicação de atividades e avaliação aos pares, para os quais eles devem se preparar previamente.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Há particularidades para o trabalho com as etapas da metodologia ativa TBL. Para saber mais a esse respeito, leia o artigo “O ‘Bê-Â-Bá’ da aprendizagem baseada em equipe”, publicado na *Revista Brasileira de Educação Médica* (Rio de Janeiro, v. 4, n. 4, out.-dez. 2016). Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-55022016000400602&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 24 ago. 2020.

Sala de aula invertida: nesta metodologia ativa, os estudantes são incentivados a realizar alguns estudos antes das aulas. Para isso, dependendo dos objetivos de aprendizagem, você também pode propor a eles que utilizem tecnologias digitais para realizar simulações animadas, por exemplo. Durante a aula, com base na preparação feita por eles, você pode fazer uma breve apresentação do material, mas, para que a aula não seja apenas expositiva, incentive-os também a participar trazendo questionamentos, debatendo, tudo isso intercalado com as atividades feitas “com lápis no papel”.

Sobre essa metodologia ativa, Bacich & Moran (2018) afirmam:

a abordagem da sala de aula invertida não deve ser novidade para professores de algumas disciplinas [...]. Mesmo nas disciplinas das ciências exatas, muitos professores podem estar usando estratégias de ensino que têm alguma semelhança com a sala de aula invertida. Eles podem não estar conscientes dessa terminologia [...]. No entanto, como mencionam Bergmann e Sams (2012) em seu livro *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*, baseado no trabalho pioneiro sobre a implantação da sala de aula invertida em suas disciplinas do ensino médio americano, os professores podem iniciar com o básico sobre a inversão da sala de aula e, à medida que vão adquirindo experiência, passar a usar a aprendizagem baseada em projetos ou em investigação. Com isso, vão se reinventando, criando cada vez mais estratégias centradas nos estudantes ou na aprendizagem, em vez das aulas expositivas que costumavam ministrar.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 30.

Método do caso ou discussão e solução de casos (*teaching case*): esta é uma metodologia ativa que favorece o desenvolvimento do pensamento crítico e analítico dos estudantes, bem como a comunicação e a argumentação, pois eles realizam pesquisas de fatos específicos que auxiliam na análise e na discussão dos casos por meio de dados coletados. Dinâmicas de socialização dos dados coletados e pesquisados, como mesa-redonda, exposições dialogadas, debates temáticos, seminários, oficinas, entre outras, materializam de modo concreto a implementação dessa metodologia ativa nas aulas.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Há outros tipos de metodologia ativa além desses comentários que você pode eleger para trabalhar nas aulas. Descubra mais a esse respeito no material disponível em: <http://base.nacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/202-o-uso-de-metodologias-ativas-colaborativas-e-a-formacao-de-competencias-2> (acesso em: 24 ago. 2020).

► As culturas juvenis e os estudantes como sujeitos autônomos dos próprios projetos de vida

Pensar as culturas juvenis na escola é pensar o jovem como sujeito do Ensino Médio sobre diferentes aspectos de representação: jovens que são vistos como fonte de vitalidade e, sem dúvida, importantes para o futuro da sociedade.

Isso porque os jovens vivenciam de muitas maneiras a participação na sociedade, até mesmo no espaço escolar, fortalecendo um estreitamento das relações pessoais com o grupo mais próximo e formando com a participação nesse grupo uma categoria socialmente produzida. E cada uma dessas categorias particulares adota uma maneira própria de expressar ou reinterpretar a cultura em que está socialmente inserida, caracterizando uma cultura juvenil.



Falamos em jovens, no plural, para indicar não apenas a diversidade que existe entre eles, como também nos vários modos que cada um deles exerce essa fase tão relevante da vida, que é ser jovem.

Observando indicadores sociais, é possível afirmar que há uma grande diversidade de realidades e de contextos culturais nos quais os jovens brasileiros estão inseridos. Isso é real e é fato; e ainda que se esses jovens se encontrem em diferentes estágios de desenvolvimento, eles precisam ser preparados para a vida adulta para que exerçam uma atuação ética, cidadã e responsável no mundo que os rodeia.

É dentro desse contexto que tanto o processo de reflexão a respeito do que cada jovem almeja quanto o planejamento de ações a serem desenvolvidas para construir esse futuro almejado podem representar uma possibilidade privilegiada de desenvolvimento pessoal e social. Trata-se da identificação do projeto de vida do jovem.

É justamente aí que a escola assume um papel especial, pois nessa fase tão relevante da vida de uma pessoa é que uma série de experiências e de aprendizados precisa acontecer para que os jovens possam, de fato, se construir como sujeitos, formando uma identidade não apenas pessoal, mas coletiva, por meio do pertencimento a uma categoria socialmente produzida.

O Novo Ensino Médio, sendo a última etapa integrante da Educação Básica, carrega em si uma oportunidade de examinar a fundo as experiências e os aprendizados. Ao assumir o caráter de formação geral e ampla, na qual cada estudante exerce autonomia para pensar e desenvolver-se, possibilitamos muito mais do que o “prosseguimento dos estudos”. Visa também a garantia de preparação para o mundo do trabalho, para o exercício consciente da cidadania e, ainda, a capacitação deles para continuar em um processo permanente de formação continuada.

As culturas juvenis são realidades profundamente dialógicas quanto a essa proposta de aprendizagem mais atrativa e a possibilidade de flexibilização dos conteúdos que o Novo Ensino Médio e a BNCC trazem, oportunizando a representação do protagonismo dessas culturas. Privilegiando o trabalho com as culturas juvenis, a escola não apenas acolhe os estudantes, como também participa do processo deles de reconhecimento de si mesmos como sujeitos autônomos, com autoconhecimento das próprias potencialidades, jovens que experimentam a relevância da participação e da intervenção na sociedade para a concretização do próprio projeto de vida.

Cabe à escola, então, valorizar as escolhas realizadas pelo próprio protagonista da aprendizagem, que é o estudante, vislumbrando assim que todos os estudantes brasileiros possam aflorar vocações. Será no ambiente escolar que eles poderão experimentar, de maneira intencional e mediada, as interações com o mundo que os cerca.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

O livro *Juventude e Ensino Médio: sujeitos e currículos em diálogo*, organizado por Juarez Dayrell, Paulo Carrano e Carla Linhares Maia (Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2014), traz reflexões acerca de juventude e Ensino Médio. Os temas apresentados auxiliam professores na interlocução com os estudantes. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 24 ago. 2020.

A BNCC e a educação integral

Na BNCC, já na “Introdução”, página 7, é feita menção à educação integral como proposta de formação. A educação integral visa promover na escola o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e busca aliar essa formação ao desenvolvimento físico, social, emocional e cultural deles.

Também para a etapa do Ensino Médio é proposta essa extrapolação da dimensão da transmissão de conteúdos ou de desenvolvimento cognitivo, buscando formar e entender cada estudante em todas as dimensões do desenvolvimento humano dele.

Para tanto, é importante entender que a juventude não é simplesmente um período entre a infância e a fase adulta, mas sim uma etapa do desenvolvimento humano, com características biológicas, psicológicas, sociais e culturais próprias. E essas características, ainda que algumas sejam comuns a todos os jovens, também apresentam diversidades no universo juvenil, como diversidade geográfica, de hábitos, de crenças, de gostos, de interesses, entre outras, e todas precisam ser respeitadas durante o processo de ensino e aprendizagem.

Ainda na “Introdução” da BNCC, páginas 9 e 10, encontram-se os textos das 10 competências gerais da Educação Básica. Acesse o documento da BNCC para conhecer os textos das competências gerais ou consulte-os nas páginas finais do Livro do Estudante. Nessas páginas, familiarize-se também com os códigos que utilizamos nesta coleção; por exemplo, CG01 se refere à competência geral 1. A seguir, vamos apresentar um pouco de cada uma delas.

As 10 competências gerais

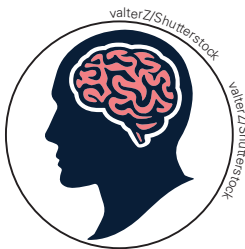
A primeira competência geral (CG01) é a do conhecimento. Trata de fazer com que os estudantes entendam como o conhecimento é precioso e fundamental para

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Disponível em: http://base.nacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.*

*Acesso em: 24 ago. 2020.

toda a vida, bem como é importante para entender o mundo, explicá-lo e intervir na realidade. O desenvolvimento dessa competência tem como principal objetivo fazer com que os estudantes valorizem o conhecimento de tal modo que tenham autonomia para selecionar fontes para pesquisa, analisar a veracidade dessas fontes, fazer interpretações e sínteses e gerenciar a busca de estar sempre aprendendo mesmo fora do ambiente da escola.



A segunda competência geral (CG02) é a do pensamento científico, crítico e criativo. Visa o desenvolvimento da criticidade e da

criatividade nos estudantes, que se deparam com problemas, pensam sobre eles com base no cientificismo e na criticidade, investigam, refletem e analisam criticamente, elaborando e testando hipóteses, e desenvolvem e propõem soluções criativas.

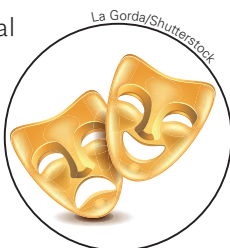
Essa competência faz a conexão entre o questionamento e a proposição para que os estudantes sejam capazes de verificar um problema, e não apenas contemplá-lo ou reclamar de modo passivo, bem como sejam capazes de inovar e propor alternativas e caminhos novos.



A terceira competência geral (CG03) é a do repertório cultural.

Explora o conhecimento com base em valores expressos por meio da arte e da cultura e trata da discussão do subjetivo que singulariza diferentes sociedades.

Portanto, essa competência do repertório cultural também abarca a diversidade cultural, a multiculturalidade e a identidade cultural. Ela envolve também a capacidade de fruição e produção de arte e cultura de acordo com a noção identitária das culturas juvenis das quais os estudantes podem fazer parte ou se identificar.

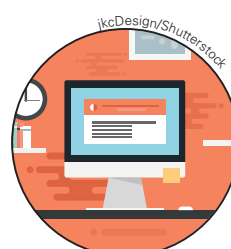


A quarta competência geral (CG04) é a da comunicação. Ocupa-se da capacidade de os estudantes se expressarem usando múltiplas linguagens (escrita, oral, corporal, digital) e da capacidade de comunicação que envolve o diálogo, a escuta e a produção de sentidos que

levem a um entendimento mútuo com interlocutores diferentes, em contextos variados, com base em multiletramentos.



A quinta competência geral (CG05) é a da cultura digital. Trata do entendimento da ética que deve permear o uso das diversas tecnologias de informação e comunicação, bem como na disseminação de informações por esses meios. Os estudantes passam a maioria do tempo conectados, seja para se comunicarem, para obter informação, seja para produzir e compartilhar conteúdos. Logo, é importante que eles compreendam como participar desses processos de modo significativo e reflexivo.



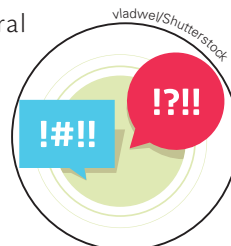
A sexta competência geral (CG06) é a do trabalho e projeto de vida.

A BNCC aponta o aspecto de trabalhar com os estudantes o projeto de vida como outra dimensão que favorece a educação integral a fim de que eles possam fazer escolhas e seguir aspirações, tanto no campo dos estudos e da entrada no mercado de trabalho como em

relação a tudo que vão escolher (estilo de vida, família, entre outros).

A sétima competência geral (CG07) é a da argumentação. Tem como objetivo fazer com que os

estudantes sejam capazes de desenvolver argumentos com base em dados, fatos e informações confiáveis, bem como de avaliar e compreender se os argumentos que assimilam em contraponto são, de modo análogo, fundamentados em fatos, dados e informações confiáveis ou se, por exemplo, são *fake news*. A competência de argumentar com responsabilidade favorece a construção de consensos para tomar decisões comuns, éticas e sustentáveis.



A oitava competência geral (CG08)

é a do autoconhecimento e autocuidado. Trata-se de os estudantes cuidarem da saúde (mental e física) e lidarem com questões relacionadas às emoções e às mudanças no corpo, que são características dessa fase de crescimento da juventude. De modo geral,

a oitava, a nona e a décima competências gerais estão vinculadas a questões socioemocionais e a oitava trata da conexão com o *eu*.



A nona competência geral (CG09) é a de empatia e cooperação. Abrange valores que são imprescindíveis para o conviver com o *outro*, explorando o reconhecimento da diversidade por meio do acolhimento da perspectiva do outro, desenvolvendo a alteridade.



A décima competência geral (CG10) é a de responsabilidade e cidadania. Trata de atitudes em prol do grupo do qual fazemos parte, o *nós*, com base na identificação do que é importante não apenas para si, mas para a coletividade.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

O material *Dimensões e Desenvolvimento das Competências Gerais da BNCC* foi elaborado pelo Movimento pela Base, um grupo não governamental e apartidário de pessoas, organizações e entidades as quais se empenham à implementação da BNCC e do Novo Ensino Médio. Recomendamos a leitura desse material, que apresenta a descrição de cada uma das competências gerais, bem como as dimensões e subdimensões. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/wp-content/uploads/2018/03/BNCC_Competencias_Progressao.pdf. Acesso em: 24 ago. 2020.

As competências específicas e as habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias

A área de Matemática e suas Tecnologias na BNCC de Ensino Médio é descrita com o objetivo de fazer com que os estudantes adquiram um entendimento de como a Matemática se aplica nas muitas situações cotidianas tanto como área isolada quanto como área interligada a outras áreas do conhecimento. Para isso, a proposta da BNCC de Ensino Médio é a de que eles ampliem os conhecimentos vistos nos Anos Finais do Ensino Fundamental com o intuito de aperfeiçoar o desenvolvimento consolidado desses conhecimentos. Para tanto, são apresentadas cinco competências específicas.

A competência específica 1 de Matemática e suas Tecnologias (CEMAT01) apresenta a Matemática como uma área do conhecimento a serviço da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. De modo simples, podemos dizer que utilizamos conhecimentos, estratégias, procedimentos e ferramentas matemáticos para auxiliar na

interpretação de contextos que a vida cotidiana apresenta. É a aplicação da Matemática, de modo refletido, considerando vários aspectos presentes nesses contextos.

A competência específica 2 (CEMAT02) trata primordialmente do envolvimento dos estudantes na proposição de soluções para problemas sociais. Essa competência se relaciona ao entendimento do estudante como membro da sociedade, seja atuando na comunidade escolar, seja exercendo atuação mais abrangente. Ela também se relaciona com projetos de vida no âmbito pessoal, social e profissional.

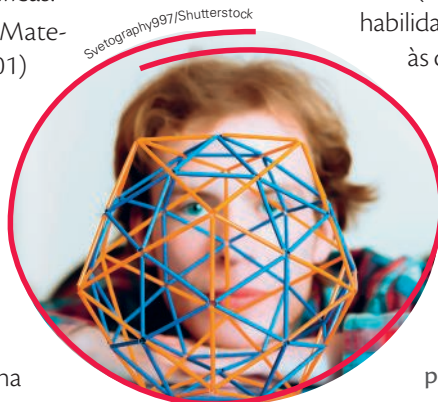
A competência específica 3 (CEMAT03) está vinculada de modo primordial à resolução e à elaboração de problemas. Essa competência e as habilidades associadas a ela deixam claro que conhecimentos, conceitos e procedimentos matemáticos ganham significado ao serem aplicados em situações reais, para resolver problemas reais e que façam sentido para os estudantes. Também é por meio dessa competência que se relaciona a modelagem matemática, com a qual é possível fazer diferentes representações matemáticas de uma situação e utilizar procedimentos, abstração e generalização com o propósito de construir e resolver situações semelhantes.

A competência específica 4 (CEMAT04) explora os diferentes tipos de registro de representação matemática (registro algébrico, geométrico, estatístico, computacional, entre outros). Por meio dessa exploração, os estudantes adquirem a capacidade de transitar entre esses tipos de registro e, mais do que isso, escolhem qual ou quais deles são mais pertinentes para representar e resolver cada situação ou problema.

Por fim, a competência específica 5 (CEMAT05) tem como objetivo principal que os estudantes investiguem matematicamente, bem como formulem hipóteses e busquem validá-las, com base em raciocínios lógicos ou deduções obtidas por meio dessas investigações.

Como para a etapa do Ensino Médio a BNCC não indica o trabalho por seriação, nesse documento não é apresentada a organização estética das habilidades referentes aos conteúdos em quadros dispostos para cada ano de estudo, como ocorre na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Anos Finais). Nessa etapa, as habilidades da área estão agrupadas subordinadas às competências específicas de modo que as habilidades possam ser trabalhadas em diferentes momentos ao longo do percurso do Ensino Médio.

Competências específicas e habilidades se conectam de tal modo que conteúdos e procedimentos são assimilados com profundidade e ganham significado para a aplicação em problemas reais da vida dos estudantes.



Assim, a organização do trabalho em sala de aula, pela combinação da perspectiva da competência específica com o ponto de vista da habilidade, é fator primordial para que os estudantes, dentro de determinado contexto de significação, consigam desenvolver os objetivos de aprendizagem esperados para a etapa do Ensino Médio. Portanto, o fim da previsão da seriação no Ensino Médio contribui para que competências específicas e habilidades possam ser investigadas e reinvestidas em diferentes momentos, em uma retomada em espiral, sempre que o contexto permitir e favorecer essa estrutura.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Qual é a diferença entre compreensão e conhecimento? Como é possível verificar se os estudantes estão alcançando esses objetivos que permeiam o ensino? Questionamentos como esses e outros mais são abordados no livro *Planejamento para a compreensão*, de Grant Wiggins e Jay McTighe (Porto Alegre: Penso, 2019), de modo combinado com sugestões de estratégias para planejar ações com os estudantes, que os incentivem durante o processo de ensino e aprendizagem.

■ Educação por competências: integração entre conhecimentos, habilidades, atitudes e valores

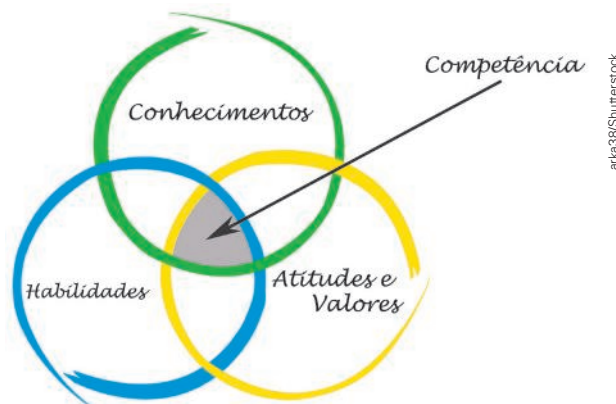
O método tradicional de ensino e aprendizagem apoia-se na particularidade de uma disposição curricular composta de uma estrutura dividida em conteúdos, fracionada, de modo que eles são trabalhados desvinculados, para depois fazer a avaliação de desempenho do estudante, isoladamente, de tempos em tempos.

Esse modelo tradicional funcionou por muito tempo, é verdade; contudo, o mundo se transformou. Modelos educacionais, essencialmente alicerçados no acúmulo de conhecimentos e em estratégias que não levavam os estudantes a utilizar esses conhecimentos de maneira prática na vida deles, clamaram por mudanças.

Tal situação impôs transformações em virtude dos desafios presentes na sociedade atual, exigindo a aplicação de novos paradigmas também no ambiente escolar, trazendo à tona a educação por competências.

A educação por competências envolve uma prática de ensino em que o conhecimento (“saber”) necessitaria estar vinculado às habilidades (“saber fazer”), às atitudes e aos valores (“saber ser”). Na educação por competências, as habilidades não se opõem ao conhecimento, os saberes escolares, nem desqualificam a pertinência dele, afinal, sem conhecimento não há como um indivíduo tornar-se competente. As habilidades aliadas às atitudes constituem ferramentas pelas quais os estudantes mobilizam o conhecimento (os saberes) em situações da vida cotidiana.

A BNCC orienta o emprego da educação por competências, abrindo espaço para a visão integrada do conhecimento, organizada por áreas do conhecimento. A educação por competências, em seu grande diferencial, combina conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, para realizar o desenvolvimento integral do estudante no processo de ensino e aprendizagem.



Portanto, uma competência é uma característica fundamental de o estudante conseguir agregar os múltiplos recursos pessoais, unindo conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, emoções, entre outros, para obter uma resposta satisfatória a um problema colocado em um contexto definido.

Desse entendimento do termo, deriva-se a noção de que existem múltiplas competências, as quais se ligam diretamente a desdobramentos que se dão dentro de cada uma delas para que conhecimentos sejam mobilizados em contextos diversos.

A mobilização do conhecimento se dá em situações da vida cotidiana e auxilia na visualização de um problema e na identificação dos conhecimentos relevantes para serem colocados em prática na resolução desse problema.

No Relatório para a Unesco da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI você encontra a apresentação, em linhas gerais, do que é e para que serve o aprendizado por competências.

Relatório para a Unesco da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI

Disponível em: http://dhnet.org.br/dados/relatorios/a_pdf/r_unesco_educ_tesouro_descobrir.pdf.*

Por tudo isso, a educação por competências implica colocar o desenvolvimento de habilidades como objetivo central da educação.

E qual é a diferença entre competências e habilidades?

De maneira simples, uma competência pressupõe o domínio de várias habilidades. Por isso, na BNCC, para cada competência específica de cada área do conhecimento

*Acesso em: 24 ago. 2020.

é apresentado um conjunto de habilidades vinculadas, e as competências gerais indicam aspectos relacionados a atitudes e valores.

No caso específico da etapa do Ensino Médio, a educação por competências contempla o aprendizado útil para a vida, que auxilie os estudantes a lidar com desafios, e o aprimoramento das habilidades socioemocionais desses jovens, visando aprimorá-los para o futuro desempenho profissional.

Abordagens teórico-metodológicas

Ao longo deste Manual, tanto nas *Orientações gerais* quanto nas *Orientações específicas*, apresentamos sugestões de desenvolvimentos com objetivos intencionais para favorecer um ensino e aprendizagem da Matemática pautados no desenvolvimento integral dos estudantes. Nesse sentido, os volumes que compõem esta coleção proporcionam o trabalho com esses objetivos sem, contudo, restringir sua criatividade nas aulas.

A elaboração desta coleção apoia-se em experiências de pesquisas em Educação Matemática sem perder de vista orientações oficiais do MEC, de modo especial, a BNCC. Essas orientações e a própria BNCC são fruto de muitas pesquisas na área de Educação, entre elas, a área de Educação Matemática.

Assim, as abordagens teórico-metodológicas que inspiraram este material fundamentam-se na finalidade principal de auxiliar você a garantir a aprendizagem efetiva dos estudantes, partindo de resultados de pesquisa que indicam o melhor aproveitamento deles na aquisição de conhecimentos de modo significativo.

Exatamente por isso, nas *Orientações gerais* deste Manual, abordamos aspectos que se entrecruzam na ação pedagógica e na prática educativa que envolvem a resolução e a elaboração de problemas, a argumentação (oral e escrita), a leitura inferencial e as análises (críticas, criativas e propositivas), a investigação científica, as metodologias ativas, o pensamento computacional, o uso pedagógico de tecnologias digitais, a etnomatemática, o pluralismo de ideias e o convívio social republicano, a Cultura de Paz e a saúde mental dos estudantes, e os Temas Transversais Contemporâneos.

Também pautaram a seleção dessa estruturação, os princípios de educação integral, de respeito e valorização da diversidade, de relevância, de contemporaneidade, de colaboração. Mas, sem dúvida, o que predominantemente motivou a seleção desse grupo de enfoques orientadores foi aquilo que eles apresentam e agregam como discussões e pontos importantes a fim de que os

objetivos de ensino, de aprendizagem e de desenvolvimento discente “ganhem vida” e venham a ser uma realidade possível.

Resolução de problemas

O matemático húngaro George Polya (1887-1985) tornou-se referência importante no ensino de Matemática, publicando vários trabalhos voltados para essa finalidade. Entre esses trabalhos, destaca-se a obra *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*.

Nessa obra, Polya propõe uma metodologia de resolução de problemas, que indica um conjunto de ações:

- as resoluções de problemas de maneira individual e coletiva;
- a revisão de conteúdo;
- atos dos professores;
- e uma estratégia de formulação tanto de questões quanto de sugestões, estratégia essa que Polya chama “a nossa lista”.

Pela ação de resolver problemas de maneira individual e coletiva, os estudantes seguem como que por uma trilha, em que a resolução de modo individual e aquela feita de maneira coletiva e participativa cooperam em torná-los aptos para atuar com maior eficácia. Polya afirma que:

[...] a resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. p. 3.

Já a ação de revisar o conteúdo se estabelece como situação essencial aos estudantes graças à apreensão de conhecimento matemático consistente e necessário à



George Polya (1887-1985), matemático húngaro, em Zurique (Suíça). Foto de 1935.

Eth-bibliothek Zürich/Science Photo Library/Forstera

resolução de problemas. Isso porque o ensino e a aprendizagem da Matemática de modo contextualizado relacionam os conhecimentos entre si e essa integração carrega consigo a possibilidade privilegiada de desenvolver competências e habilidades.

Por sua vez, competências e habilidades atuam como formadoras, estruturando o pensamento dos estudantes, o que os capacita a analisar, a interpretar situações e poder argumentar, expondo as próprias conclusões.

Quanto aos atos dos professores, no que diz respeito à atividade docente, há necessidade de se conhecer o conteúdo a que se refere o problema em resolução. Justamente por isso, é fundamental manter-se atualizado.

Outro ponto destacado a respeito da atuação do professor é a empatia com os estudantes, que leve à identificação de dificuldades e expectativas deles; uma atitude docente empática humaniza a relação professor-estudante e traz maior produtividade ao trabalho.

Outro ponto destacado ainda nessa ação é a necessidade de incentivar o raciocínio independente.

Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. p. V (prefácio à primeira tiragem).

“A nossa lista” (nome que Polya dá à estratégia de formulação tanto de questões quanto de sugestões) caracteriza-se como uma sequência de indagações e sugestões. Essas se tornam ferramenta poderosa para a resolução de problemas matemáticos por auxiliar os estudantes a organizarem mentalmente o processo de resolução de problemas.

De modo geral, a sequência de Polya está dividida em quatro fases de trabalho, sendo elas:

- a compreensão do problema;
- o estabelecimento de um plano;
- a execução desse plano;
- o retrospecto ou a verificação.

Pela busca da *compreensão do problema* de modo claro e completo, procura-se identificar informações essenciais à resolução: quais são os dados do problema, quais são as respostas que precisamos obter e, sobretudo, quais são as condições que ligam esses dados (ou parte desses dados) às respostas.

Nesse momento, torna-se muito importante que você não atue como uma mera fonte de informações, mas que indague e que deixe os estudantes criarem hipóteses, as quais, em um primeiro instante, podem ainda não passar de meras suposições. Na tentativa de nortear essa identificação de informações e a criação de hipóteses mais consistentes para a busca da solução correta, eles podem empregar recursos, como desenhos, esquemas, diagramas, entre outros.

Uma vez tendo compreendido o problema, faz-se necessário o *estabelecimento de um plano* para a resolução, o que, na realidade, torna-se a principal realização quanto à eficácia na resolução de um problema. Recordar-se de conceitos matemáticos ou de problemas semelhantes é de grande valor para alcançar o sucesso na resolução, atentando-se que não é única a escolha de qual plano será estabelecido, ou seja, de quais estratégias de resolução serão utilizadas e quais conceitos serão mobilizados para isso.

De acordo com Polya:

[...] temos um plano quando conhecemos, pelo menos de modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. p. 5.

Neste momento, é importante destacar a importância de também se trabalhar com problemas que não apresentem uma única relação entre todos os dados, as estratégias de interpretação e resolução e as respostas a serem obtidas, pois, no mundo real, os problemas não aparecem sempre de maneira “fechada” e organizada. É no momento de *estabelecimento de um plano* que, além de definir as possíveis estratégias de resolução, deve ocorrer também a seleção de quais dados fornecidos serão utilizados (no caso de problemas com excesso de dados) ou quais outros dados, que não foram expressos no enunciado, seriam necessários para a resolução. Neste último caso, cabe considerar também a possibilidade de coletar novos dados para fazer análises e resolver o problema que inicialmente não teria solução.

Estabelecida a estratégia de resolução, passa-se à *execução do plano*.

Conceber um plano, a ideia de resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo. [...] Executar o plano é muito mais fácil; paciência é o de que mais se precisa.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. p. 8.

Por fim, a ação de *retrospecto* ou *verificação* pode trazer grandes benefícios quanto à construção e ao aperfeiçoamento das competências e habilidades dos estudantes em resolver problemas e, exatamente por isso, essa fase do trabalho não deve ser negligenciada.

Ao se fazer o retrospecto da resolução de um problema, apreende-se de que maneira será possível resolver outros problemas com raciocínio semelhante ao aplicado àquela resolução. Além disso, pela verificação atenta pode-se identificar se não ocorreu nenhum erro durante a execução do plano traçado. Polya destaca que:

[...] o plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-los, um após outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e que não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. p. 9.

Observe também que a metodologia de resolução de problemas descrita por Polya está alinhada com as concepções da BNCC. Em especial, destacamos os comentários relativos à competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer

algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas.

Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problemas, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. p. 536-537.

O sucesso da aprendizagem dos estudantes por meio da resolução de problemas, utilizando essa metodologia de Polya e alinhada à BNCC, está proporcionalmente ligado à postura adotada por você na condução da aplicação dessa proposta.

Uma situação de ensino e de aprendizagem, enquanto momento pedagógico que é, caracteriza-se como atividade eminentemente humana. Tendo em conta a noção de que cada ser humano leva consigo emoções e sentimentos, esses devem necessariamente ser considerados para o êxito das situações de ensino e aprendizagem. Logo, torna-se também importante identificar quais são os sentimentos presentes nos estudantes durante esse processo.

Não à toa, é possível observar que a obra *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático* apresenta um tópico que aborda especificamente os temas persistência, esperança e sucesso, no qual Polya faz um alerta.

Seria um engano supor que a resolução de problemas seja puramente uma “questão intelectual”: persistência e emoções desempenham, nesse caso, um papel importante. Fraqueza de vontade e aquiescência por comodismo para fazer um pouquinho podem bastar para um problema rotineiro na sala de aulas. Mas, para resolver um problema científico sério, é necessária uma força de vontade capaz de sobreviver a anos de trabalho e decepções amargas.

[...] A persistência flutua entre esperança e desespero, entre satisfação e decepção. É fácil prosseguir quando se pensa que a solução se encontra na primeira esquina, mas é difícil perseverar quando não se vê uma saída para a dificuldade. Exultamos

quando a nossa previsão se confirma. Ficamos desalentados quando o caminho que vimos seguindo com certa confiança é repentinamente bloqueado e, aí, a nossa persistência fraqueja.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. p. 114.

Se os sentimentos experimentados pelos estudantes até então, em relação à aprendizagem da Matemática, foram caracterizados pela confusão, pela frustração, pela tristeza e pela perda de interesse, o empenho desta coleção, bem como da estruturação dela como um todo, é justamente o de promover o contrário a partir de agora.

De modo específico, no que diz respeito à adoção dos postulados de Polya, espera-se que o estudante possa vir a identificar na resolução dos problemas o momento privilegiado para ser produtivo e se sair melhor a cada nova tentativa, até chegar à satisfação por conseguir resolvê-los.

Com base nisso é que foi concebida a ideia de, a cada capítulo dos volumes que compõem esta coleção, serem propostas situações iniciais contextualizadas e uma diversidade de problemas que podem ser trabalhados seguindo esses passos sugeridos por Polya para a resolução de problemas, sempre que você e os estudantes julgarem oportuno. Isso porque:

[...] ensinar a resolver problemas é educar a vontade. Na resolução de problemas que, para ele, não são muito fáceis, o estudante aprende a perseverar a despeito de insucessos, a apreciar pequenos progressos, a esperar pela ideia essencial e a concentrar todo o seu potencial quando esta aparecer. Se o estudante não tiver, na escola, a oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções que surgem na luta pela solução, a sua educação matemática terá falhado no ponto mais vital.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. p. 114.

Elaboração de problemas

Além da resolução de problemas sob os diversos aspectos e importâncias elencados no tópico anterior, a BNCC apresenta diversas habilidades, desde o Ensino Fundamental, com foco na elaboração de problemas, bem como parte do próprio texto da competência geral 2: “formular e resolver problemas e criar soluções (até mesmo tecnológicas) com base nos conhecimentos das

diferentes áreas”. O processo de elaboração de problemas é um passo à frente de resolvê-los, pois exige do estudante a plena compreensão não apenas da situação e da pergunta que se quer responder, mas também de todos os dados que precisam ser fornecidos e dos conceitos que serão utilizados, bem como, é claro, criatividade.

Ainda nos comentários relativos à competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio:

[...] convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de “Resolver e Elaborar Problemas” em lugar de “Resolver Problemas”. Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. p. 537.

Para atingir esse propósito, conforme as diversas propostas didáticas apresentadas nos seis volumes desta coleção, diversos caminhos podem ser seguidos e etapas intermediárias podem ser trilhadas para ampliar o repertório dos estudantes. Um trabalho inicialmente em duplas ou grupos, seguido de propostas individuais, quando eles se sentirem seguros para isso, também é uma estratégia de aprendizado.

Por exemplo, analisar problemas do livro didático, observando e compreendendo os dados que são informados, as respostas que precisamos obter e a estrutura do enunciado, permite a elaboração de problemas com estruturas semelhantes ou a elaboração de novas perguntas para o mesmo conjunto de dados. Ainda analisando um problema já formulado, os estudantes também podem refletir e explicar o que ocorreria se algum dado fosse alterado, acrescentado ou retirado.

Outras estruturas de elaboração podem ser propostas, nas quais não apenas os conteúdos ou temas são definidos, mas também é informada, por exemplo, a pergunta que deve ser feita ou a resposta que deve ser obtida ao resolvê-lo.

Além disso, a coleta externa de informações para a elaboração de um problema não apenas amplia o repertório dos estudantes e torna a situação significativa para eles, como os aproxima de situações nas quais eles poderiam ser de fato expostos, afinal, no cotidiano estamos constantemente recebendo informações, dados e valores, fazendo cálculos, respondendo a perguntas e tomando decisões.

Ainda no âmbito da elaboração de problemas, as criações dos estudantes se tornam ótimos instrumentos para acompanhar o desenvolvimento da aprendizagem e para aferir a compreensão deles. Nessa observação dos problemas elaborados, não apenas você pode olhar para o problema que um deles criou, mas também pode oportunizar o olhar de um colega. Quando um estudante resolve um problema que o colega elaborou, ele aplica todas as metodologias de resolução, identifica particularidades relacionadas à escrita e ao contexto utilizado pelo autor, avalia a compreensão do enunciado e, no caso de haver informações faltantes, pode nortear qual dado precisaria ser informado para que o problema fosse resolúvel, passando também a atentar-se a isso nas próprias elaborações que vier a fazer.

Ou seja, para elaborar problemas, adquire-se inicialmente a habilidade de resolver problemas semelhantes; e, depois de elaborá-los, novamente retorna-se à necessidade de resolvê-los e, com isso, adquirir novas habilidades de resolução e de elaboração, aprofundando cada vez mais as aprendizagens.

► Argumentação (oral e escrita), leitura inferencial e análises (críticas, criativas e propositivas)

Argumentando é possível convencer outra pessoa daquilo que se está afirmando ou que se está negando. Isso porque argumentar envolve o raciocínio que se emprega para demonstrar, ou mesmo para comprovar, aquilo que se propõe. É justamente nesse sentido que a argumentação vem cooperar no processo de comunicação.

Nesta coleção, damos destaque ao trabalho com a argumentação matemática realizado ao longo dos seis volumes. Sem deixar de abranger o papel geral mencionado no parágrafo anterior, a argumentação matemática desempenha uma tarefa específica e, para tanto, requer de cada estudante a habilidade de estabelecer um conjunto de raciocínios matemáticos seguidos de uma conclusão.

Há, portanto, uma inegável importância na capacidade de o estudante se comunicar matematicamente, em ele saber expressar aquilo que pensa e estar apto a compartilhar raciocínios por meio da argumentação matemática. Afinal, não será possível a você compreender o que ele está pensando se não externalizar de modo eficaz aquilo que raciocinou para desenvolver a resolução de um problema, por exemplo. É preciso que ele saiba demonstrar como testou o raciocínio e quais foram as estratégias formuladas durante a investigação.

Percebe-se assim que, embora a Matemática seja considerada uma ciência exata, o aspecto da argumentação a assinala como uma atividade humana. Isso acontece

pelo fato de a argumentação conferir uma característica humana muito forte à Matemática, que consiste no trabalho com os aspectos do diálogo e da ação de comunicar matematicamente com o máximo de êxito possível, ainda que se esteja sujeito a acertos e a equívocos em meio a um processo de aplicabilidade, que envolve questionamentos, buscas, exemplos, hipóteses, conjecturas e contestações.

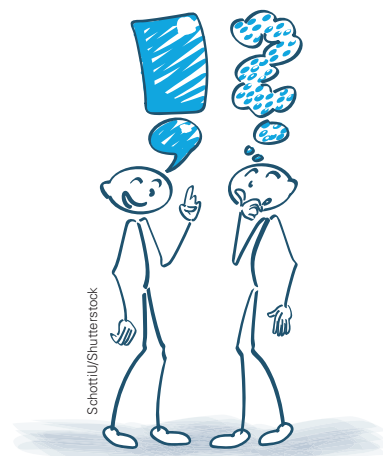
Argumentar matematicamente com proficiência, oralmente ou por escrito, tem por objetivo possibilitar uma participação de qualidade ao estudante diante do mundo que o cerca. Afinal, a argumentação pressupõe a formulação e avaliação de propostas, bem como a tomada de decisões, e que estas estejam orientadas pela ética e para o bem comum.

E de que modo os estudantes podem chegar a essa proficiência? O desenvolvimento de competências e habilidades implica diretamente a mobilização do raciocínio. Assim, é importante que eles tenham a possibilidade de interação com os colegas e com você para que, juntos, reflitam coletivamente na construção de novos conhecimentos. Para isso, devem ser apresentadas propostas de investigação de problemas e, sucessivamente, haja espaço para que eles expliquem e justifiquem as resoluções possíveis que identificaram, sempre com a devida ênfase nos processos de argumentação matemática.

Se tomarmos como exemplo a identificação de regularidades e padrões, podemos afirmar que essa identificação exige raciocínio, mas também exige a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado, a representação e a comunicação dessa regularidade.

Por tudo isso, a comunicação é essencial e indispensável para a fundamentação daquilo que se acredita que seja verdade: identificar e saber expressar qual é seu argumento, praticar a escuta atenta do outro e apreender o argumento do outro. E tudo isso acontece como parte de um trabalho coletivo e da vivência dos estudantes.

Por fim, não podemos deixar de destacar também a questão da argumentação e da comunicação como fatores relevantes e de destaque para favorecer o desenvolvimento do letramento matemático. A argumentação matemática é uma perspectiva muito importante da BNCC e merece destaque na formação do cidadão, pois faz parte, diretamente, do letramento matemático.



Na página 266 da BNCC, o letramento matemático é definido como:

[...] as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. p. 266.

De acordo ainda com nota de rodapé 45, na página 266 da BNCC, essa definição de letramento matemático está de acordo com o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa).

Segundo a Matriz do Pisa 2012, o “letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.”.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. p. 266.

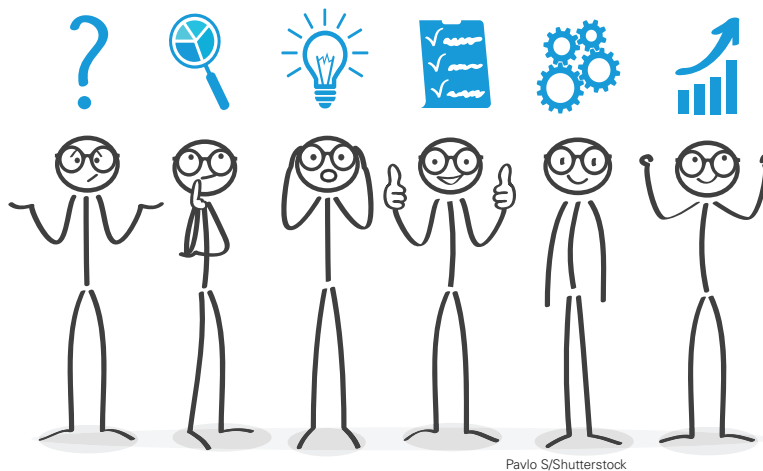
É importante ressaltar a relevância do Pisa como programa de avaliação que produz indicadores que colaboram para o entendimento acerca de como está a educação aplicada, qualitativamente, nos países que participam desse programa. Esse entendimento visa cooperar com a identificação de novas políticas públicas em função da melhora da qualidade da educação.

Para tanto, a avaliação do Pisa procura verificar se os estudantes adquiriram habilidades e conhecimentos fundamentais para desempenharem o papel de cidadãos diante das exigências da sociedade atual e avalia, também, como as escolas estão preparando os jovens nesse sentido.

Quando a BNCC equipara a definição de letramento matemático com a do Pisa, vemos claramente que a

Matemática tem um papel de formadora de cidadãos críticos, aptos a tomar decisões considerando justificativas que seguem um raciocínio.

Percebe-se, dessa maneira, que, além do aspecto da argumentação e da comunicação que chancelam a Matemática como uma atividade humana nas Exatas, de modo análogo o letramento matemático também a caracteriza como uma atividade humana por estar intrinsecamente ligada à produção de uma leitura inferencial de problemas.



Isso porque uma inferência é fruto de uma observação e manifesta-se concretamente como a conclusão de um raciocínio. As inferências que um estudante produz para a compreensão do enunciado de um problema matemático, por exemplo, não surgem dos conhecimentos explícitos no texto, mas nos prévios que ele já possui e o auxiliam na construção de sentido para as “lacunas” a serem preenchidas, que estão além do sentido explícito do texto.

Ao desenvolver a alfabetização, a leitura e a escrita da língua materna nos estudantes, a ideia do letramento vai muito além na medida em que um sujeito letrado não somente sabe ler e escrever, mas também exerce e desenvolve práticas sociais nas quais utilizam a escrita. Assim, para que os estudantes produzam inferências que levem à compreensão e interpretação corretas dos textos lidos, é importante que eles tenham também o letramento matemático desenvolvido, atribuindo dinamismo à organização de informações que favoreçam o processamento e a compreensão de um problema.

Conhecer procedimentos de cálculos matemáticos é importante e necessário, mas o letramento matemático vai muito além: os estudantes necessitam estar aptos a combinar esses elementos na resolução e elaboração de problemas, e é essa a capacitação proposta na BNCC.



Pavlo S/Shutterstock

Sendo assim, os estudantes do Ensino Médio continuarão resolvendo problemas, porém, além de encontrar a resposta correta, precisam justificar essa resolução, explicar por que a fizeram de determinada maneira e demonstrar o raciocínio para os colegas e para você. De acordo com a proposta da BNCC, já não será suficiente apenas estudar conceitos; eles devem apreendê-los e usá-los como conhecimento aplicável em problemas da vida real, com base na produção de análises críticas, criativas e propositivas.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

No livro *Investigações matemáticas na sala de aula*, de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira (4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. Coleção Tendências em Educação matemática, 7), os autores apresentam desafios e benefícios das práticas de investigação em aulas de Matemática com base em informações coletadas em pesquisas que envolvem professores e estudantes. As análises que surgem das reflexões dessas vivências compõem um rico material para quem deseja implantar investigações matemáticas nas aulas.

Investigação científica

O envolvimento dos estudantes no exercício da curiosidade intelectual, bem como a utilização das ciências com criticidade e criatividade, é fundamental para a produção de conhecimentos com base em processos de investigação científica.

A proposição de problemas e atividades que envolvam o desenvolvimento dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução, abdução e raciocínio por analogia), para analisar e explicar processos de investigação, sem dúvida colabora para um ambiente de ensino e de aprendizagem repleto de significados, no qual cada estudante sinta-se não somente inserido, mas também convidado a agir e a atuar como protagonista da própria aprendizagem.

Nesse sentido, de acordo com as propostas feitas no Livro do Estudante desta coleção, é importante que os estudantes façam investigações de natureza matemática com cientificismo, respeitando o nível adequado a cada etapa de ensino, pois, desse modo, eles formalizam os conteúdos enquanto desenvolvem o raciocínio e a lógica. Afinal, investigar cientificamente passa por formular perguntas, interpretar dados empregando o raciocínio e a lógica, para, logo em seguida, desenvolver hipóteses e fazer conjecturas.

Se é certo que uma hipótese é um modo de proporcionar uma resposta temporária a uma pergunta, também é certo que o que realmente importa não é que a hipótese esteja correta, mas sim que ela inicie um processo por meio do qual o estudante analise e discuta, compare, avalie, conclua, verifique, valide e demonstre.

O raciocínio vai além do ato intelectual em si, transcendendo-o, estabelece vínculos, formando um processo, que exige demonstrações e provas das “verdades” que se está conhecendo ou investigando.

Esse processo de conhecimento proporcionado pela investigação com base nesse aspecto científico privilegia novas maneiras de pensar e de o estudante se “envolver” com a Matemática em ambiente escolar. E por proporcionar a cada um deles oportunidades de criar e de consolidar conhecimento matemático, desenvolvendo a criatividade, é que as investigações matemáticas têm adquirido destaque.

Para o desenvolvimento de atividades dessa natureza, são essenciais as ideias e pesquisas dos estudantes, bem como sua atuação, professor, como incentivador, que apoia e privilegia o desenvolvimento de atitudes questionadoras, a observação para a análise de problemas, a formulação de hipóteses e a busca de explicações e argumentações, em que o desenvolvimento de ideias próprias tem papel de destaque.

Para compreender os tipos de raciocínio por dedução, indução e abdução, mencionados anteriormente, leia o texto a seguir.

Dedução e indução são procedimentos racionais que nos levam de algo já conhecido a algo que ainda não é conhecido, isto é, permitem que adquiramos conhecimentos novos graças a conhecimentos já adquiridos. Por isso, costuma-se dizer que, no raciocínio, o pensamento segue *cadeias de razões* ou os *nexos e conexões* necessárias entre as ideias ou entre os fatos.

[...]

A **dedução** consiste em partir de uma verdade já conhecida e que funciona como um princípio geral ao qual se subordinam todos os casos que serão demonstrados a partir dela. Na dedução demonstra-se que uma verdade já conhecida se aplica a todos os casos particulares iguais. Por isso também se diz que a dedução vai do geral ao particular ou do universal ao individual.

O ponto de partida de uma dedução é ou uma ideia verdadeira (ou definição) ou uma teoria verdadeira (um todo sistemático de definições e demonstrações verdadeiras). A finalidade do processo dedutivo é *assegurar a inferência de conclusões novas e verdadeiras* com base na definição do objeto ou na teoria já existente.

Por exemplo, se definirmos o triângulo como uma figura geométrica cujos ângulos internos somados são iguais à soma de dois ângulos retos, dessa definição deduziremos todos os diferentes tipos de triângulos possíveis [...], todas as propriedades de todos os triângulos possíveis e todas as propriedades de cada um dos tipos possíveis de triângulos. [...]

No caso de uma teoria, a dedução permitirá que cada novo caso particular encontrado seja conhecido, por meio da demonstração de que a ele se aplicam todas as leis, regras e verdades da teoria. Ou seja, a dedução é um procedimento pelo qual um fato ou objeto particular são conhecidos por *inclusão* numa teoria geral.

[...]

A **indução** realiza um caminho exatamente inverso ao da dedução. Com a indução, partimos de casos particulares iguais ou semelhantes e procuramos a lei, definição ou teoria geral que explica e subordina todos esses casos particulares. A definição ou a teoria são obtidas no ponto final do percurso. A razão também oferece um conjunto de regras precisas para guiar a indução. Se tais regras não forem respeitadas, a indução será considerada falsa.

Por exemplo, colocamos água no fogo e observamos que ela ferve e se transforma em vapor; colocamos leite no fogo e vemos que parte dele também se transforma em vapor; colocamos vários tipos de líquidos no fogo e observamos sempre sua transformação total ou parcial em vapor. Induzimos desses casos particulares que o fogo possui uma propriedade que leva à evaporação e à ebulição dos líquidos. Essa propriedade é o calor.

[...]

A **abdução** é uma espécie de intuição, mas que não se dá de uma só vez, indo passo a passo para chegar a uma conclusão. A abdução é a busca de uma conclusão pela interpretação racional de sinais, de indícios, de signos. O exemplo mais simples [...] para explicar o que é a abdução é o modo como os detetives, nos contos policiais, vão coletando indícios e sinais e formando uma teoria para o caso que investigam.

[...] A abdução é a forma que a razão possui quando inicia o estudo de um novo campo científico que ainda não havia sido abordado. Ela se assemelha à intuição do artista e à adivinhação do detetive, que, antes de iniciarem seus trabalhos, só contam com pistas a seguir. Os historiadores costumam usar a abdução.

De modo geral, a indução e a abdução são procedimentos racionais que empregamos para a aquisição de conhecimentos, enquanto a dedução é o procedimento racional que empregamos para verificar ou comprovar a verdade de um conhecimento já adquirido.

CHAUÍ, M. *Iniciação à Filosofia*. Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. único, p. 94-97.

Outro tipo de raciocínio lógico-matemático, denominado **raciocínio por analogia** – bastante utilizado quando associamos conceitos novos a conceitos adquiridos anteriormente, em busca da associação de padrões –, se assemelha à indução, porém, nele partimos de semelhanças entre casos particulares e podemos chegar a outra proposição particular (outra semelhança entre os casos), e não a uma conclusão geral. Em outras palavras, chegamos a uma compreensão de que é provável que essa proposição particular seja verdadeira (e quanto maior a semelhança entre os casos particulares que comparamos, melhor será a proposição particular a que chegaremos), sem de fato deduzi-la por indução para uma conclusão geral.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Para aprimorar os conhecimentos dos tipos de raciocínio lógico-matemático, sugerimos a leitura do trabalho de dissertação de mestrado *O pensamento analógico na Matemática e suas implicações na modelagem matemática para o ensino*, de Larissa Kovalski, em especial o tópico 2.1.5 de raciocínio por analogia, que traz exemplos aplicados na área de Matemática. Disponível em: <https://www.acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/56193/R%20-%20D%20-%20LARISSA%20KOVALSKI.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 24 ago. 2020.

► Pensamento computacional

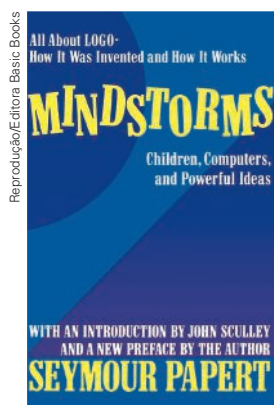
O pensamento computacional não está relacionado unicamente à competência de programação de computadores nem se refere apenas às habilidades relacionadas ao uso deles, como usar a internet, enviar e receber mensagens eletrônicas ou fazer parte de redes sociais.

Acredita-se que a origem do termo pensamento computacional esteja vinculada a um artigo da cientista da computação e pesquisadora estadunidense Jeannette Wing (1956-). A publicação original desse artigo foi em março de 2006, na revista *Communications of the ACM*, tradicional periódico da *Association for Computing Machinery*, primeira sociedade científica e educacional dedicada à computação.



Jeannette Wing, cientista da computação e pesquisadora estadunidense, em Nova York (Estados Unidos). Foto de 2018.

Apesar de Jeannette Wing ter apresentado o termo pensamento computacional nesse artigo em 2006, ele já havia sido usado anteriormente no livro *Mindstorms* (Nova Iorque: Basic Books, 1980), do matemático e educador Seymour Papert (1928-2016), nascido na África do Sul e nacionalizado nos Estados Unidos. Nessa obra, Seymour Papert trata da cultura dos computadores e do papel da tecnologia no ensino, mais especificamente no ensino de crianças. Ele apresenta o termo pensamento computacional nessa obra, mas não se aprofunda nele.



Reprodução da capa do livro *Mindstorms*, de Seymour Papert, publicado em 1980.



Seymour Papert (1928-2016), matemático e educador estadunidense, Cambridge, Massachusetts (Estados Unidos). Foto de 2003.

Isso posto, inicialmente, com o objetivo de contextualizar que o termo não é recente, fica o questionamento: E como podemos definir o que é pensamento computacional?

Pesquisadores e estudiosos do tema não estabelecem uma definição precisa e resumida do termo, e as interpretações vêm e continuam se adaptando ao longo do tempo. O que existe, atualmente, são determinadas concepções a respeito do pensamento computacional, as quais estão fundamentadas na visão de conhecimento desses dois pesquisadores.

Como foi mencionado, Jeannette Wing, em 2006, evidenciou o termo trazendo com ele a concepção de que é, verdadeiramente, uma metodologia para a resolução de problemas na qual combina-se pensamento crítico com fundamentos da computação. Desse modo, Wing afirma que o pensamento computacional, ao mesmo tempo que está relacionado ao uso do computador, é uma habilidade para todas as pessoas, independentemente da área de formação e/ou atuação.

Em 2007, Wing amplia essa compreensão, com base em avanços nas pesquisas feitas por ela, indicando que o pensamento computacional se baseia na Matemática e na Engenharia. Na Matemática, ao utilizar o pensamento matemático restrito à parte física do computador (o uso físico da máquina). Na Engenharia, no aspecto de

empregar o pensamento computacional em ambiente virtual, para além do ambiente físico do computador, estabelecendo interação com o mundo real.

Em virtude desse entendimento de Jeannette Wing, acreditou-se que, quando se tratasse da Educação Básica, o pensamento computacional estaria vinculado exclusivamente à disciplina de Matemática. Porém, após mais pesquisas, viu-se que, na realidade, o pensamento computacional perpassa todas as áreas do conhecimento e, por isso, precisa ser desenvolvido e explorado no trabalho de todas elas.

Assim, em 2010, Wing novamente atualizou a concepção de pensamento computacional, destacando ser ele uma abordagem para resolução de problemas. Abordagem essa que a pesquisadora relaciona a um processo de pensamento que emprega fundamentos da computação para resolver problemas, modelando soluções que possam se tornar generalizadas para uma mesma categoria de problemas, de modo que tais soluções sejam eficazes.

Contudo, também em 2010, surgiram pesquisadores críticos ao pensamento computacional. Isso porque, nessa época, já havia anos de pesquisas referentes ao uso da tecnologia na educação e o entendimento de que o pensamento computacional levaria o ser humano a pensar como a máquina contrariava a todas as teorias e todos os estudos a respeito do uso de tecnologia na educação.

Em 2014, após mais alguns anos de pesquisa, Wing retorna com a concepção do funcionamento do pensamento computacional segundo a perspectiva de processos de pensamento fundamentados na computação, mas, diferentemente de em 2010, ela foca a resolução de problemas e as soluções de modo que a resolução possa ser realizada tanto por uma máquina quanto por um ser humano.

É possível observar que houve todo um percurso de variação de definições da pesquisadora Wing. Foi com base nisso que, naquela época, acreditou-se, e atualmente ainda há alguns pesquisadores que acreditam, na perspectiva de que o pensamento computacional se referia apenas ao uso do computador e até mesmo institutos internacionais dos Estados Unidos e da Inglaterra cunharam algumas definições de que o pensamento computacional seria algo mais operacional.

Em contrapartida, principalmente na perspectiva da educação, houve outra vertente atribuindo que se trata de algo da Psicologia cognitiva: um processo de pensamento que se desenvolve quando se utiliza fundamentos da computação.

Foi desse modo que, a partir de 2014, começou-se a compreender que o pensamento computacional não se restringe ao uso do computador, da máquina em si, e o que se pode apreender é que o pensamento computacional foca no desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Portanto, a partir desse ano, adquiriu-se a percepção de que o

pensamento computacional poderia estar sendo desenvolvido mesmo quando não utilizamos o computador, justificando-se no emprego dos fundamentos das habilidades da computação e não propriamente no uso do computador.

Foi então que, principalmente aqui no Brasil, teve início uma vertente chamada “pensamento computacional desplugado”, que nada mais é do que o desenvolvimento desse processo cognitivo do indivíduo, todavia sem o uso do computador.

A BNCC prevê o desenvolvimento do pensamento computacional desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. E o pensamento computacional está presente quando os estudantes necessitam desenvolver uma representação do raciocínio lógico em atividades de todas as áreas do conhecimento.

Ao utilizar os fundamentos do pensamento computacional na educação, podemos dizer que ele está relacionado a quatro pilares: reconhecimento de padrões, decomposição, algoritmo e abstração. Embora existam, como já dito, duas concepções do que seja o pensamento computacional, todos o entendem como um processo cognitivo que está conectado aos quatro pilares mencionados e estes são oportunizados em atividades e seções de todos os volumes desta coleção.

Tomando por base que o pensamento computacional é um processo de pensamento que se fundamenta na computação, é preciso levar em conta como é o funcionamento de um computador, mas sem deixar de lembrar que a palavra computacional, que integra o termo, não se refere ao uso do computador em si, e sim à utilização de fundamentos da computação.

De maneira simples, podemos descrever assim: quando alguma informação é inserida em um computador, ocorre a decomposição da informação em partes solucionáveis e um reconhecimento de padrões e, então, advém um sequenciamento, um algoritmo, eventualmente recursivo.

O pensamento computacional é um processo de raciocínio que solicita diversos níveis de abstração para a identificação do atributo principal, da principal característica da solução para uma situação para que essa solução possa se tornar válida para diversos problemas semelhantes. Isso implica que a abstração é algo que não acontece de uma hora para outra, mas somente após várias decomposições do problema em questões menores, logo, menos complexas, mais fáceis de resolver e, assim, chega-se ao reconhecimento de padrões existentes que geram o problema.

Desse modo, ideias são geradas em um pensamento sequencial e recursivo, há a modelação de um problema e a divisão dele em partes menores para desenvolver a capacidade de abstração.

Observe como essas ações se organizam nos quatro pilares do pensamento computacional.

SEBRAE. *4 habilidades desenvolvidas pelo pensamento computacional*. Disponível em: <https://d335luupugsy2.cloudfront.net/cms/files/44571/1540579736infografico4.jpg>. Acesso em: 24 ago. 2020.

Reprodução/Centro Sebrae de Referência em Educação Empreendedora



MAIS SOBRE O ASSUNTO

A plataforma Programaê foi criada, em parceria pelas Fundações Telefônica Vivo e Lemann, para introduzir as linguagens de programação e o pensamento computacional em práticas pedagógicas. No site é possível encontrar diversos tipos de material tanto para estudantes quanto para professores aprenderem e prepararem as práticas pedagógicas. Disponível em: <http://programae.org.br/>. Acesso em: 24 ago. 2020.

O Instituto Ayrton Senna também disponibiliza em seu site um rico material sobre o assunto: *Educação integral por meio do pensamento computacional – Letramento em programação: relatos de experiências e artigos científicos*, organizado por Amilton Rodrigo de Quadros Martins e Adelmo Antonio da Silva Eloy (1. ed. Curitiba: Appris, 2019). Organizado em seções e capítulos, apresenta artigos sobre programação e pensamento computacional na Educação Básica e relatos de experiências envolvendo esses temas. Disponível em: <https://institutoayrtonsenna.org.br/content/dam/institutoayrtonsenna/radar/estante-educador/instituto-ayrton-senna-educacao-integral-por-meio-do-pensamento-computacional.pdf>. Acesso em: 24 ago. 2020.

► Uso pedagógico de tecnologias digitais

Ao longo da História, podemos perceber o desenvolvimento de diferentes tecnologias associadas à inteligência humana. Em um primeiro momento, foi a interação oral que estabeleceu a transmissão das informações e do conhecimento, fazendo-os circular nos diversos grupos sociais.

Com a invenção da escrita, surgiu a possibilidade de estabelecer informações em esquemas de distribuição contínuas e lineares. Já com o advento da informática, tornou-se plausível estabelecer o uso do *hiperlink*, da ligação que conduz a outras unidades de informação, em outra parte de um mesmo documento ou remetendo a outros documentos.

No quarto capítulo da obra *Fases das tecnologias digitais em Educação matemática: sala de aula e internet em movimento*, dos autores Marcelo de Carvalho Borba, Ricardo Scucuglia R. da Silva e George Gadanidis, é mencionado que a lousa, o lápis e o papel são exemplos de mídias do século passado que ainda estão presentes de modo intenso nas salas de aula.

Portanto, cabe destacar que uma mídia, uma tecnologia, não substitui a outra, a transforma: as informações, que primeiro eram transmitidas apenas oralmente, passaram a ter a possibilidade de ser distribuídas por escrito sem que a oralidade acabasse, e, atualmente, estão também informatizadas, sem que com isso se tenha parado de escrever e de falar. E naturalmente outras tecnologias devem surgir no futuro e passarão a ser utilizadas concomitante com as já existentes.

Dessa realidade, é possível deduzir que novas tecnologias trazem consigo a oportunidade de agilizar processos e levam à reorganização do pensamento. Sobretudo nas últimas décadas, com o crescimento e a popularização dos

avanços tecnológicos, verifica-se a presença e a utilização das tecnologias digitais no dia a dia de modo geral, fazendo com que a introdução das tecnologias digitais no ambiente escolar seja um processo já em andamento e irreversível.

Tanto docentes quanto discentes estão inseridos nesse contexto histórico-social e, por isso, a utilização de tecnologias digitais nas práticas pedagógicas tem um enorme potencial de contribuição para o processo de ensino e aprendizagem. Assim é em diversas áreas do conhecimento humano, e com a Matemática não é diferente.

Diferentes recursos tecnológicos podem ser usados como práticas, ou seja, maneiras diferentes de reorganizar o pensamento; nesta coleção, propiciamos atividades dirigidas ao uso de diversas delas.

Atualmente há uma gama de *softwares* que possibilitam o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos diversificados cujo uso, de acordo com o Parecer CNE/CEB nº 15/2000, se justifica pelo caráter pedagógico que oferece, propiciando um material rico, diversificado e com múltiplas formas contemporâneas de linguagem e que articula planejamento didático, objetivos, conhecimentos e aplicações.

Um exemplo matemático de tecnologia digital aplicável nas aulas é o *software* GeoGebra. Criado pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter (1976-), que iniciou esse projeto na Universidade de Salzburg, na Áustria, em 2001, o GeoGebra caracteriza-se como uma multiplataforma gratuita, aplicável a todos os níveis de ensino, que combina Geometria, Álgebra, Números e Estatística em uma única aplicação.

Uma atividade realizada no Geogebra, na qual se vai trabalhar com diferentes conteúdos que até então não se tinha tomado contato antes, oportuniza a reorganização da maneira de pensar, de modo diferente de como isso se daria com lápis e papel, exclusivamente. Não se trata de que um processo seja melhor nem pior do que o outro, são apenas processos diferentes. E essa diferença diz respeito à maneira como o conhecimento é produzido, a concepção sobre a produção de conhecimento.

Quando tratamos de dispositivos móveis, os *smartphones* fazem parte da vida da maioria dos estudantes; mas também podemos considerar os *tablets*. Para retirar o celular do posto de “vilão” responsável pela dispersão e usá-lo a favor do ensino e da aprendizagem, contamos com diversos aplicativos. Retomando o exemplo anterior, há até mesmo a possibilidade de usar o GeoGebra no celular, podendo baixá-lo na loja oficial de aplicativos do sistema operacional do aparelho.



Smartphone com o GeoGebra instalado.

Reprodução/www.geogebra.org

Outro exemplo de tecnologias digitais que agregam valor às aulas e dão dinamismo a diversas construções e análises são as planilhas eletrônicas. Embora não sejam programas criados originalmente para uso educativo, as planilhas eletrônicas possibilitam efetuar cálculos, entender fórmulas, construir gráficos, fazer simulações financeiras e muito mais. Um exemplo de planilha, que também é um *software* livre, é o aplicativo Calc do LibreOffice.

Também devemos ter um olhar especial a respeito das redes sociais, às quais têm como aspecto positivo permitir aos estudantes a participação e interação em grupos de interesse matemático, bem como a divulgação de informações e materiais produzidos em propostas didáticas escolares. É preciso, porém, cuidado com possibilidades de *bullying* e com a perda de privacidade. Dois critérios merecem destaque.

- Considere que, ao fazer uso de um recurso tecnológico, não é necessário “partir do zero”. Não é imperativo que você saiba construir *softwares* em si: para poder usá-los nas aulas, é plausível e viável que você utilize materiais e atividades que já existem, mediante adaptação se necessário. Para isso, busque, com critério e em fontes seguras, entre a farta oferta de materiais disponíveis na internet.
- Para o ensino e a aprendizagem de Matemática com uso de tecnologias digitais, fique atento ao optar por um recurso tecnológico específico em sua atuação pedagógica, evitando adotar determinada opção por modismo. Com esse tipo de motivação, há o risco de escolher inadequadamente e, desse modo, contribuir para criar dificuldades de aprendizagem aos estudantes.

Também não podemos deixar de citar o uso pedagógico da calculadora (física, no *smartphone*, no computador ou *on-line*). Pensando na razão social, as propostas escolares não podem se distanciar da realidade e a vida em sociedade está impregnada do uso da calculadora; pensando pedagogicamente, quando os estudantes efetuam cálculos na calculadora, eles têm mais tempo livre para raciocinar, criar estratégias e resolver problemas. Portanto, o que devemos levar em consideração é: quando e como utilizar a calculadora.

O uso da calculadora pode e deve ser recomendado como facilitador da aprendizagem da Matemática, por exemplo: quando os cálculos numéricos são apenas auxiliares na questão a ser resolvida; para investigar propriedades matemáticas, analisando regularidades para levantar hipóteses, fazer conjecturas e testá-las; ao trabalhar com problemas da realidade, que muitas vezes apresentem números muito “grandes” ou “pequenos”. Assim, entendemos que o uso da calculadora no Ensino Médio

pode tanto ser proposto pelos docentes quanto pode contar com a autonomia dos estudantes, que têm maturidade para tomar decisões, entre elas, usar ou não a calculadora nos momentos em que compreenderem que ela é benéfica para a situação e para o desenvolvimento das próprias aprendizagens.

Assim, as tecnologias digitais podem atuar como elemento de mudança quando empregadas na educação. Elas podem provocar inovações no processo de ensino e aprendizagem ao criar situações que seriam impossíveis de realizar sem esses recursos. Para citar apenas um exemplo, diferentes tecnologias digitais permitem fazer simulações e alterar os dados observando o comportamento dos resultados, de maneira muito mais rápida, interativa e visual do que se os registros fossem feitos no papel. Desse modo, as tecnologias digitais podem ser de grande utilidade, facilitando e incrementando o trabalho docente e modificando a dinâmica desenvolvida nas aulas.

Ao introduzir e utilizar recursos tecnológicos em ambiente escolar, você se propõe a descobrir e experimentar. E tal experimentação oportuniza um processo de (re)elaboração e (re)adaptação constante. E exatamente por isso o uso de tecnologias digitais pelos estudantes jamais deve encontrar ênfase maior no recurso digital em si, em detrimento de seu papel como professor.

Rompendo com a transmissão direta de conhecimento, que tinha seu ponto fundamental no ensino centrado em seu papel enquanto professor e no estudante desempenhando um papel passivo, o uso pedagógico das tecnologias digitais representa oportunidade para incentivar o protagonismo dos estudantes, criar diálogo, incentivar a imaginação deles e estabelecer uma relação mais produtiva e positiva entre eles e os conteúdos e conhecimentos.

Por tudo isso, é possível constatar que as tecnologias digitais, com o caráter de acesso em tempo real às informações, são recursos que vieram para ficar. É preciso aprender a conviver com elas e a usá-las como aliadas do ensino e aprendizagem.

■ Etnomatemática

Conhecimentos e comportamentos são compartilhados e compatibilizados, possibilitando a continuidade dessas sociedades. Esses conhecimentos e comportamentos são registrados, oral ou graficamente, e difundidos e passados de geração para geração. Nasce, assim, a história de grupos, de famílias, de tribos, de comunidades, de nações.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática, 1).

De acordo com essa citação de um trecho da obra *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, do matemático e professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (1932-), um dos pioneiros no estudo da etnomatemática e também precursor e idealizador desse tema, percebe-se que há uma produção de conhecimento em todas as culturas. E dessas produções pode-se inferir que algumas são originadas da Matemática, subordinada a um contexto social e cultural específico em determinado período histórico.

A Matemática surgiu como um dos meios de auxílio para a concretização de necessidades básicas do ser humano, como a construção de moradias e a fabricação de utensílios. Desse modo, ao longo da História, tanto a afirmação de identidade dos grupos sociais quanto a história desses mesmos grupos passam pela Matemática.

Na década de 1970, a exploração da prática matemática em vários e diferentes cenários culturais, vinculada às rejeições já existentes em relação ao ensino tradicional de Matemática, serviu de base para o surgimento da etnomatemática.

De acordo com Ubiratan D'Ambrosio (2019, p. 2), a etnomatemática busca, dentro de um "ambiente natural, social, cultural e imaginário" (*etno*), "explicar, aprender, conhecer e lidar com" (*matema*) "modos, estilos, artes, técnicas" (*tica*). Nesse sentido, a etnomatemática aborda as relações interculturais.

E o que a etnomatemática propõe? O incentivo para que a Matemática venha a ser explicada e entendida dentro de um contexto cultural próprio.

De que modo? Explicando os procedimentos de formação, de organização e de transmissão de conhecimentos em sistemas culturais variados.

Visando qual finalidade? A de conduzir o estudo da Matemática a novas maneiras de relação intercultural.

Desde meados da década de 1980, a etnomatemática tem se alicerçado, no Brasil e no mundo, como uma abordagem de estudos e pesquisas da Educação matemática, com o objetivo de favorecer reflexões acerca de contrapontos existentes entre conhecimento matemático e contextos socioculturais, bem como as consequências dos pressupostos que se originam desses contrapontos a fim de concretizar sugestões para a prática de sala de aula. Tomando esses objetivos como base, apresentamos propostas de etnomatemática nos volumes desta coleção.

No que diz respeito a nosso país, levando em conta o cenário nacional, incluindo o escolar, sabemos que o Brasil tem uma múltipla história cultural. Por exemplo, se for observado de modo comparativo a Matemática vivenciada por uma dona de casa, por um bancário, por um vendedor e por um economista, é possível perceber facilmente que cada uma delas é inteiramente distinta das

demais, em razão do contexto social e cultural em que cada uma dessas pessoas está inserida. Além disso, cada uma delas detém particularidades que a potencializa na situação em que está inserida, bem como limites que a tornam menos apropriada para outras situações.

Abrangente, a etnomatemática busca identificar essa pluralidade cultural que constitui nosso país para, então, procurar elaborar um nível de referência educacional que corresponda às necessidades enquanto nação. Afinal, se a Matemática não encontrar interação com as práticas do cotidiano no âmbito social e no cultural das pessoas, ela parecerá sem sentido para elas.

O ensino e a aprendizagem da Matemática, em uma perspectiva da etnomatemática, possibilitam estabelecer uma relação mais construtiva e consistente entre teoria e prática, ao considerar experiências cotidianas como rico material a ser analisado e a respeito do qual se pode refletir. O que evita, ainda, o excesso de teoria estudada apenas na superficialidade, sem deixar de reafirmar a escola como local privilegiado de aquisição de conhecimento.

A etnomatemática colabora com um dos mais importantes princípios do processo educativo: o de partir daquilo que o estudante já sabe e conhece, uma vez que ele se caracteriza como um indivíduo dotado de experiências significativas ao processo de ensino e aprendizagem e, portanto, apto a arriscar-se a novas maneiras de "conhecer" o mundo e de problematizá-lo, para então buscar soluções.

Ubiratan D'Ambrosio,
doutor em Matemática
e teórico da Educação.

Foto de 2018.



► Pluralismo de ideias e convívio social republicano

Nas interações da vida em sociedade, a todo momento convivemos com o pluralismo de ideias, pois são inúmeros os aspectos que nos diferem uns dos outros, sobretudo em um país como o Brasil, que é marcado pela diversidade étnica e cultural. Por isso existe a necessidade de transpor para o ambiente escolar noções de convívio social com base em atitudes, costumes e valores isentos de qualquer tipo de preconceito ou discriminação relacionados à condição socioeconômica, origem étnico-racial, estereótipo de gênero, entre outros. Essas noções de convívio social precisam estar de acordo com determinadas regras e princípios que garantam a cada um os

direitos respeitados e o exercício da democracia em nosso país. Desse modo, torna-se possível o convívio social republicano em interação com o pluralismo de ideias.

É dessa interação em um contexto de convivência maior que se origina o contato produtivo com o pluralismo de ideias proposto nesta coleção. Contato produtivo com base na troca, e não em polarizações de opinião concentradas em extremos opostos (de grupos, interesses, atividades, etc.).

Tudo isso, quando experienciado pelos estudantes na escola, possibilita a eles observar, apreender, refletir e compreender que, assim como as interações familiares e escolares têm determinadas regras para um bom convívio, também há na sociedade, de modo geral, e no mercado de trabalho em que eles estão prestes a se inserir, particularidades com as quais eles terão de lidar e assimilar condutas de como atuar com “o outro”, respeitando a identidade que singulariza cada um.

Ao estabelecer esse exercício de conhecimento amplo, tanto do cenário exterior quanto de seu próprio mundo interior, abre-se para o estudante o horizonte de como ele pode e deve interagir com o meio, com as adversidades encontradas e com o diferente, e de como pode se relacionar com outras pessoas. O jovem necessita estar preparado no que diz respeito às questões sociais, pessoais e interpessoais para, assim, vir a ser um cidadão de opiniões consistentes e abalizadas.

Somos plurais, e, diante da realidade de cada um, o pluralismo de ideias precisa fazer parte do convívio social, considerando que temos direitos, mas também deveres a serem cumpridos.

A Cultura de Paz reúne um conjunto de valores, atitudes e comportamentos, todos fundamentados no respeito à vida, nos direitos humanos e na promoção de liberdades fundamentais do ser humano.

Em virtude desse sentido abrangente, a Cultura de Paz é muitas vezes mal compreendida. Para entendê-la, é indispensável assimilar a noção de que o conceito de paz não rejeita o conflito, mas rejeita a violência. O conflito é algo absolutamente natural nas relações humanas e não deve ser compreendido como indutor à violência, o que erroneamente se convencionou acreditar em nossa cultura. A violência acaba por se estabelecer quando não ocorre a tentativa de mediação de conflitos para gerar consenso.

A compreensão imprecisa do que seja a Cultura de Paz provém da falta de informação e de conhecimento a respeito dela, dos elementos que a compõem e de como ela trabalha a concepção de paz: como meio de mediação de conflitos, de intervenção nas injustiças sociais e de auxílio às relações interpessoais.

Sendo assim, a escola precisa promover o diálogo e a reflexão interagindo de modo articulado com as práticas sociais. O diálogo é uma relação horizontal que se nutre da humildade, da confiança, do respeito e do amor. Quando os polos em diálogo se ligam dessa maneira, há uma verdadeira relação de comunicação e o desenvolvimento do estudante, que compreende que é possível viver com as diferenças se reconhecermos o direito do outro de ter os próprios pontos de vista.

No ambiente escolar, em que há reflexão e respeito, os estudantes sentem-se mais acolhidos em suas necessidades, pois a eles é dada a oportunidade de estabelecer uma postura dialógica, que amplia e torna possível a inclusão de toda a comunidade escolar, passando pelos demais estudantes, equipe pedagógica, de modo geral, e a família.

Esse é o caminho a ser buscado, sobretudo levando-se em consideração os desafios à saúde mental da juventude na atualidade. É indispensável buscar que cada vez mais professores e famílias tenham acesso a informações sobre saúde mental no intuito de apoiar os jovens em possíveis dificuldades que estejam enfrentando ou venham a enfrentar.

Para isso, recomenda-se o desenvolvimento de iniciativas de promoção da Cultura de Paz na escola, em que sejam trabalhadas questões e temas atuais, como respeito, autocuidado, entre outros. E mesmo reconhecendo que há problemas que estejam além das questões que envolvem diretamente o ambiente escolar, se os estudantes encontrarem espaço para falar de suas questões familiares e sociais, de seus medos e ansiedades, são diminuídos seus conflitos internos e externos, e esses jovens sentem-se fortalecidos em suas questões emocionais e incentivados em suas potencialidades.



VLADGRIN/Shutterstock

► Cultura de Paz e saúde mental dos estudantes

No texto “A etapa do Ensino Médio” na BNCC, entre as finalidades descritas na página 464, é retomada a educação integral como compromisso da escola. E, no percurso desse processo formativo, para que haja êxito, o trabalho passa pelo desenvolvimento de uma Cultura de Paz.

A Cultura de Paz e a saúde mental dos estudantes são construídas no dia a dia. Isso acontece nos relacionamentos, na maneira de lidar com os conflitos e as dificuldades, no exercício do respeito interpessoal e na valorização do ser humano. E, para que isso aconteça, é indispensável que os princípios da não violência regulem posturas, atitudes e falas na escola. Isso é uma postura de mudança e transformação de comportamento de todos os envolvidos no processo educativo.



Símbolo do Ano Internacional da Cultura de Paz (ano 2000), conforme estabelecido pela Organização das Nações Unidas (ONU).

Reprodução/https://unesdoc.unesco.org/

MAIS SOBRE O ASSUNTO

A obra *Práticas educativas e Cultura de Paz: articulando saberes e fazeres*, organizada por Eliana Maria do Sacramento Soares e Lezilda Maria Teixeira (Caxias do Sul, RS: Educs, 2018) é um manual de orientação para professores, com práticas relacionadas à Cultura de Paz. O segundo capítulo destaca práticas na Educação Básica. Disponível em: <https://www.ucs.br/site/midia/arquivos/ebook-praticas-educativas.pdf>. Acesso em: 24 ago. 2020.

Temas Contemporâneos Transversais

Outro aspecto relevante para a promoção da educação integral que também é abordado na BNCC é a questão do mundo contemporâneo. Devemos considerar que os jovens do Ensino Médio estão sendo preparados para enfrentar desafios do século XXI: momento paradoxal por ser espontâneo por uma perspectiva, mas complexo por outra; período dinâmico se analisado por determinado

aspecto, mas ao mesmo tempo incerto quando consideradas outras exterioridades.

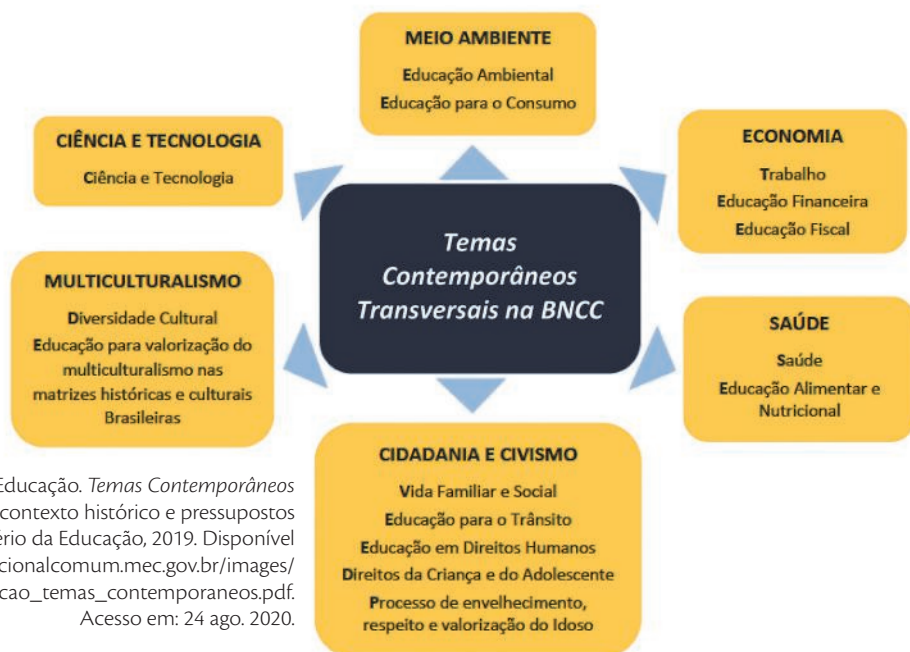
Os jovens do Ensino Médio estão sendo preparados para a vida adulta na qual possam vir a exercer profissões, muitas das quais podem ainda nem existir. Portanto, os desafios com os quais esses jovens terão de lidar também estão em constante mudança e transformação.

No capítulo introdutório da BNCC, página 19, os temas contemporâneos são mencionados pela primeira vez no documento e são indicados como temas “que afetam a vida humana em escala local, regional e global”. A BNCC nessa mesma página, na sequência do texto, aponta que esses temas devem ser abordados, preferencialmente, de maneira transversal e integradora, o que pode ser observado em diversas propostas feitas nesta coleção. Isso quer dizer que eles precisam ser explorados com base em habilidades das áreas do conhecimento de modo contextualizado.

Posteriormente à homologação da BNCC, outros documentos foram elaborados pelo MEC para esclarecer a inserção desses temas no ambiente escolar, que passaram a compor os chamados Temas Contemporâneos Transversais (TCTs).

Esses temas abarcam vários conhecimentos, habilidades, atitudes e valores e, portanto, favorecem o trabalho alicerçado na educação por competências já debatida anteriormente neste Manual. Se for considerada a articulação por áreas do conhecimento a fim de que a interdisciplinaridade possa ser concretizada, os TCTs constituem oportunidade adequada para esse trabalho.

Destacamos também o fato de que os TCTs são adequados a diferentes perfis de estudantes e diferentes turmas, mas também podem envolver um trabalho com



Reprodução/http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 24 ago. 2020.

a escola como um todo e, até mesmo, em diferentes etapas de ensino, como o Fundamental e o Médio. Isso porque os TCTs são integradores e permitem muitos desdobramentos para o trabalho a ser desenvolvido.

Nas páginas 18, 19 e 20 do capítulo introdutório da BNCC, há, nas notas de rodapé, indicação de todas as leis, pareceres, resoluções, decretos, enfim, marcos legais em que os TCTs são colocados, como orientação legal que devem ser trabalhadas dentro das escolas.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Um dos materiais elaborados pelo MEC após a homologação da BNCC é o *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*. Ele descreve de modo detalhado o contexto histórico percorrido pelos TCTs, bem como a ênfase que cada um deles envolve. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 24 ago. 2020.

Avaliação em Matemática: Como e o que avaliar?

Quando o processo de ensino é entendido como simples transmissão de informações prontas e o de aprendizagem é compreendido como mera memorização dessas informações, o estudante é encarado como passivo e receptivo, e a avaliação dele se dá somente por meio de exames, provas, notas, tendo em vista apenas “passar de ano”. Ao se falar de avaliação, como era anteriormente concebida e aplicada, o que se podia verificar em muito se assemelhava à descrição a seguir.

São muitos os caracteres que a atual prática de avaliação do aluno na escola apresenta. Vamos iniciar por descrever o seu *ritual* e, a seguir, verificar suas manifestações mais latentes.

A avaliação educacional escolar se processa, no âmbito da sala de aula, mais ou menos como se segue descrito.

Após um período de aulas e exercícios escolares (um mês ou dois de aulas), denominado *unidade de ensino*, os professores procedem a atos e atividades que compõem o que é normalmente denominado *avaliação da aprendizagem escolar*.

Para tanto, formulam provas ou testes, ou um outro mecanismo qualquer, que possa ser utilizado como instrumento por meio do qual o professor solicita dos alunos a manifestação de condutas esperadas, através da qual os alunos possam expressar seus entendimentos, compreensões de conteúdos, hábitos e habilidades ensinados.

Esses instrumentos de avaliação são cotidianamente construídos da seguinte maneira. Próximo do

final da unidade de ensino, o professor formula o seu instrumento de avaliação, a partir de diversas variáveis: conteúdo ensinado efetivamente; conteúdo que o professor não ensinou, mas que deu por suposto ter ensinado; conteúdos ‘extras’ que o professor inclui no momento da elaboração do teste, para torná-lo mais difícil; o humor do professor em relação à turma de alunos que ele tem pela frente; a disciplina ou a indisciplina social desses alunos; uma certa ‘patologia magisterial permanente’, que define que o professor não pode aprovar todos os alunos, uma vez que não é possível que todos os alunos tenham aprendido suficientemente todos os conteúdos e habilidades propostos, etc. Assim, são muitos os ingredientes que se fazem presentes na elaboração do instrumento de avaliação, ainda que tecnicamente muitos desses elementos não deveriam se fazer presentes nos testes.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. 19. ed. São Paulo: Cortez, 2008. p. 66-67.

Essa abordagem, entretanto, além de ultrapassada, constitui-se de pouca eficácia para reconhecer o que de fato o estudante absorveu de conhecimentos e o que ele adquiriu como habilidades diante dos objetivos previstos e estabelecidos.

De acordo com as concepções pedagógicas atuais, sabemos que a educação é construída em um processo que se dá por meio de experiências vivenciadas de modos múltiplos, e não apenas “dentro” do ambiente escolar. Essa é uma dinâmica de abordagem que agrega ao desenvolvimento integral do estudante e na qual ele é um ser ativo e dinâmico, protagonista da construção do próprio conhecimento. Esse perfil de estudante necessita ser avaliado segundo a ótica de um professor mediador.

O estudante ativo, dinâmico e protagonista é capaz de reconhecer o que já construiu durante o processo de ensino e aprendizagem, bem como distinguir os “pontos fortes” que possui e o que ainda necessita (re)construir e ampliar para consolidar e ampliar conhecimentos. É justamente desse modo que esse jovem pode vir a fortalecer a própria noção de responsabilidade e uma atitude crítica diante da vida como um todo.

Avaliar com base nessa ótica compreende um acompanhamento sistemático e contínuo em ambiente escolar, em que o docente avalia cumulativamente, expressando uma análise pela sobreposição em escala crescente dos resultados dos estudantes. Isso, com o objetivo maior de identificar e diagnosticar a situação de aprendizagem de cada estudante em relação à programação curricular pedagógica.

A sobreposição em escala crescente dos resultados contempla os “ganhos” educacionais obtidos, passo a passo. Logo, acompanha a construção e internalização de conceitos, enquanto uma avaliação que prioriza somente o resultado despreza todo esse processo em si.

O estudante não aprende a fim de ser avaliado, no máximo ele memoriza, “decora” com essa finalidade. Exatamente por isso, conceber um caráter meramente classificatório à avaliação, que não somente priorize, mas também se restrinja rigorosamente a um sistema de notas parciais e médias finais para o processo de avaliação escolar, equivale a ignorar a complexidade do universo avaliativo e, além disso, é uma postura que aprova que a escola assuma uma visão social excludente e adote o insucesso verificado nas notas como meio de disciplinar e punir.

A questão do erro, da culpa e do castigo na prática escolar está bastante articulada com a questão da avaliação da aprendizagem. Esta, à medida que se foi desvinculando, ao longo do tempo, da efetiva realidade da aprendizagem para tornar-se um instrumento de ameaça e disciplinamento da personalidade do educando, passou a servir de suporte para a imputação de culpabilidade e para a decisão de castigo.

De fato, a avaliação da aprendizagem deveria servir de suporte para a qualificação daquilo que acontece com o educando, diante dos objetivos que se têm, de tal modo que se pudesse verificar como agir para ajudá-lo a alcançar o que procura. A avaliação não deveria ser fonte de decisão sobre o castigo, mas de decisão sobre os caminhos do crescimento sadio e feliz.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. 19. ed. São Paulo: Cortez, 2008. p. 58.

Um professor mediador adota a prática de investigação, em que interroga a relação entre o ensino e a aprendizagem. E faz isso para identificar não somente os conhecimentos construídos pelos estudantes, mas também as dificuldades de cada um deles, estabelecendo assim uma análise completa, realizada em perspectiva dialógica, e assumindo uma função diagnóstica, em que se verifica quais causas podem estar impedindo a aprendizagem de cada estudante.

O que se avalia é também de fundamental importância. No contexto da prática investigativa docente, o “erro” assume caráter de uma pista. O erro pode indicar de que maneira o jovem estudante do Ensino Médio está elaborando relações entre os conhecimentos que já tem e os novos adquiridos ao longo do processo. Admitindo que haja uma melhor compreensão dos conhecimentos, estes se solidificam, e é essa a interação esperada de um processo de construção e reconstrução de conteúdos para internalização deles. O “erro” identificado como pista abandona o papel de ausência de conhecimento para assumir um papel relevante e insubstituível dentro do processo de ensino e aprendizagem.

Uma resposta, esteja ela correta ou não, constitui sempre um “ponto de chegada”, por assim dizer, o que demonstra por si só quais são os conhecimentos que já foram absorvidos, assimilados, construídos e reconstruídos naquele universo pessoal, e quais conhecimentos representam um novo ponto de partida, para recomeçar a elaboração que possibilite novas conclusões e novas tomadas de decisão.

A avaliação necessita ainda de outro desdobramento: contemplar a educação em valores, isto é, a aprendizagem para se ter novos valores e, em decorrência deles, novas atitudes.

A legislação que regulamenta o sistema educacional de nosso país como um todo, tanto no âmbito público quanto no privado é a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394/1996). Ao referir-se à averiguação da aquisição de conhecimento escolar, ela delimita que a avaliação da atuação do estudante tenha caráter contínuo e cumulativo.

Art. 24. A Educação Básica, nos níveis Fundamental e Médio, será organizada de acordo com as seguintes regras comuns:

[...]

V – a verificação do rendimento escolar observará os seguintes critérios:

a) avaliação contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais; [...]

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. DOU, Brasília, DF: 23 dez. 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em: 24 ago. 2020.

Ao se referir a esse aspecto, a lei está mencionando o fruto da observação do caminho trilhado pelo estudante no processo de aprendizagem, e não aludindo especificamente à mensuração de notas.

Se você, professor, entende e encara a avaliação dessa maneira como é descrita na lei, você a tem em mãos como uma ferramenta única para traçar metas do provável desenvolvimento futuro de cada estudante. Isso porque, uma vez que você pode traçar um perfil do provável resultado do processo de aprendizagem do estudante, terá oportunidade de tornar possível, até mesmo, a autoavaliação, para que, elaborando a apreciação dos próprios “erros” e “acertos”, ele seja capaz de assumir a responsabilidade por dedicar-se e empenhar-se nos estudos, conforme o caráter de uma avaliação participativa.

Para que a avaliação funcione para os alunos como um meio de autocompreensão, importa que tenha, também, o caráter de uma *avaliação participativa*. Por participativo, aqui, não estamos entendendo o espontaneísmo de certas condutas autoavaliativas, mas sim a conduta segundo a qual o professor, a partir dos instrumentos adequados de avaliação, discute com os alunos o estado de aprendizagem que eles atingiram. O objetivo da participação é professor e alunos chegarem juntos a um entendimento da situação de aprendizagem que, por sua vez, está articulado com o processo de ensino. Então, não será uma discussão abstrata, mas sim uma discussão a partir dos resultados efetivos da aprendizagem, manifestados nos instrumentos elaborados e utilizados.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. 19. ed. São Paulo: Cortez, 2008. p. 84.

Trocar ideias, dividir impressões e ouvir diferentes opiniões é um processo de avaliação global e dialógico em uma educação integral, em valores e colaborativa. Esse é o caminho pelo qual você poderá fazer da avaliação um processo que culmine em interação e em uma ação eficaz de ensino e aprendizagem.

A avaliação, tanto no geral quanto no caso específico da aprendizagem, não possui uma finalidade em si; ela subsidia um curso de ação que visa construir um resultado previamente definido.

[...] A avaliação subsidia decisões a respeito da aprendizagem dos educandos, tendo em vista garantir a qualidade do resultado que estamos construindo. Por isso, não pode ser estudada, definida e delineada sem um projeto que a articule.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. 19. ed. São Paulo: Cortez, 2008. p. 85.

Devemos avaliar os dados essenciais, que se traduzem durante práticas educativas nas aulas, definidos previamente em um planejamento de ensino que tenha sido produzido de modo consciente, dos pontos de vista pedagógico e científico, com base em uma proposta teórico-metodológica consistente. É necessário que se tenha isso claro para que a avaliação não se perca nem se detenha sobre dados secundários ao processo de ensino e aprendizagem, mas, esteja fundamentada naquilo que configura o essencial: a construção do conhecimento apreendido pelo estudante.

Essa construção é o que caracteriza, de modo específico, o objeto de avaliação. Assim, do ponto de vista com que se exerce a avaliação, a noção do papel da escola e as concepções de educação e de ensino e aprendizagem estão íntima e indissociavelmente ligadas. Essa noção e essas concepções dependem que se opte por uma prática avaliativa que atue positivamente como transformadora da realidade escolar.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

O material *Enem: Exame Nacional do Ensino Médio – fundamentação teórico-metodológica*, elaborado pelo Ministério da Educação, é uma coleção de textos sobre os aspectos teóricos que organizam a avaliação do Enem e sobre a articulação desses aspectos com as áreas do conhecimento prescritas na reforma do Ensino Médio. A educação por competências é o grande eixo que concretiza essa articulação e é um dos alicerces do Enem desde 2013. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/informacao-da-publicacao/-/asset_publisher/6JYIsGMAMkW1/document/id/488495. Acesso em: 24 ago. 2020.

Os volumes desta coleção da área de Matemática e suas Tecnologias

► Como os volumes do Livro do Estudante estão organizados

Esta coleção é composta de seis volumes. Uma das características pedagógicas é que os volumes são autocontidos, o que significa que cada um deles encerra em si todos os conceitos e as informações necessários para o entendimento completo dele. Esse fato não estabelece uma progressão fixa e linear entre os seis volumes, ou seja, eles podem ser utilizados por você da maneira que preferir e sua escolha pode ser autônoma, considerando a realidade dos estudantes e do projeto pedagógico da escola.

Conheça os conteúdos que são abordados em cada volume:

- função exponencial, função logarítmica e sequências;
- função afim e função quadrática;
- Geometria plana e Geometria espacial;
- Trigonometria e sistemas lineares;
- análise combinatória, probabilidade e computação;
- Estatística e Matemática financeira.

Videotutoriais

Para cada volume da coleção há um videotutorial que compõe o Material Digital do Professor.

Em cada videotutorial, com uma linguagem audiovisual atrativa e que favorece o entendimento de modo mais fácil, apresentamos elementos-chave do respectivo volume a que ele se refere. Esses elementos-chave apresentam uma síntese a respeito das propostas de encaminhamentos para o desenvolvimento dos capítulos do volume.

► Como cada volume do Livro do Estudante está organizado

Cada volume é composto de dois ou três capítulos, dependendo do conteúdo tratado. Para melhor aproveitamento da estrutura dos capítulos, boxes e seções, e até servir de sugestão de recurso para as aulas, apresentamos a seguir nossa intenção ao elaborar cada componente do capítulo, bem como algumas sugestões de como trabalhá-los.

Apresentação

A *Apresentação* é o primeiro contato dos estudantes com o volume e é nela que falamos um pouco dos propósitos pensados na elaboração da coleção e das oportunidades que eles terão no decorrer do livro. A leitura do texto, individual ou coletiva, pode ser proposta logo na primeira aula.

Conheça seu livro

Nas páginas do *Conheça seu livro*, os estudantes conhecerão a estrutura de cada capítulo do volume. Esse é um momento importante de reconhecimento das propostas que serão feitas e que pode deixá-los curiosos e animados com o que vão desenvolver.

Sumário

O *Sumário* traz a enumeração dos capítulos e das principais seções do Livro do Estudante além da estrutura das seções finais do volume. Nesse momento de observação do *Sumário* os estudantes conhecem os conteúdos que serão abordados no volume e se apropriam do material que vão utilizar.

Abertura e Conheça seu livro

Cada capítulo inicia com uma *abertura*, que traz uma imagem atrativa, textos e questões que se relacionam aos conteúdos do capítulo. O desenvolvimento da abertura e das perguntas leva os estudantes a investigar os assuntos que introduzem, direta ou indiretamente, os conteúdos que serão estudados, e a refletir sobre eles, permitindo a você mapear os conhecimentos prévios deles. O trabalho com a abertura pode ser feito coletivamente, de modo que eles possam compartilhar impressões, trocar ideias e propor dinâmicas diversas de ensino e que você possa tomar ciência dos conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que eles trazem dos anos anteriores e do mundo em que vivem, mapeando e planejando o percurso de ensino que será adotado considerando esses levantamentos.

Em seguida, no *Conheça o capítulo*, são apresentados os objetivos a serem atingidos com o capítulo e a justificativa de pertinência desses objetivos. Conhecer o que é esperado da aprendizagem propicia aos estudantes uma organização prévia dos estudos. Além disso, no decorrer ou ao término do capítulo, eles podem retomar os objetivos e se autodiagnosticar para verificar como as aprendizagens estão ocorrendo e, se necessário, propor junto a você ajustes nos percursos de ensino.

Também no *Conheça o capítulo* os estudantes conhecem a lista de todas as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os Temas Contemporâneos Transversais da BNCC cujo desenvolvimento será favorecido ao longo do capítulo. Oriente-os a consultar, nas páginas finais do Livro do Estudante, os descritivos das competências e das habilidades para compreendê-los, relacionando-os aos objetivos descritos.

Tópicos do capítulo

Após a abertura, cada capítulo é organizado em tópicos com textos, atividades, boxes e seções. Cada tópico inicia com algumas situações relacionadas aos conteúdos que serão apresentados nele. As situações e as questões propostas oportunizam momentos de investigação e exploração que preparam os estudantes e os instigam aos conhecimentos que estão por vir.

Também neste momento você tem a oportunidade de levantar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que eles trazem dos anos anteriores e do mundo em que vivem, agora relacionados a um conjunto específico de conteúdos e habilidades que serão mobilizados. Com isso, novamente surge a oportunidade de mapear e planejar as propostas que serão desenvolvidas nas aulas considerando esses levantamentos. Nesse trabalho, cabe ressaltar a oportunidade de explorar metodologias ativas, como da sala de aula invertida, principalmente quando os conteúdos do tópico se relacionarem diretamente com outros já vistos pelos estudantes nos Anos Finais do Ensino Fundamental e, agora, no Ensino Médio serão retomados para ampliação e consolidação.

O desenvolvimento dos conteúdos do tópico, que são apresentados em seguida das situações iniciais, apresenta estruturas diversificadas de acordo com o propósito, os objetivos a serem atingidos e as oportunidades que cada conteúdo permite, com foco no desenvolvimento das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC que estão previstas para o tópico.

Explore para descobrir

Os boxes *Explore para descobrir*, muitas vezes apresentados no começo de uma sequência de conteúdos, trazem atividades de exploração, experimentação, verificação e sistematização de conteúdos e procedimentos. Neles, os estudantes formulam ideias, criam estratégias e conjecturam algo que será formalizado em seguida, destacando um dos muitos momentos em que eles são protagonistas das descobertas e das aprendizagens de maneira significativa. E, ao observá-los durante esse momento de “aprender fazendo”, você tem a oportunidade de perceber conhecimentos, ideias, aptidões e dificuldades que cada um deles apresenta e, assim, organizar as ações pedagógicas de maneira mais eficaz à realidade escolar.

Reflita

As perguntas ou propostas feitas nos boxes *Reflita* levam os estudantes a refletir sobre o que estão aprendendo. Muitas vezes a resposta pode ser dada oralmente, para que coletivamente eles possam organizar e expressar ideias e percepções, exercitando a comunicação e a argumentação matemática. Observe como eles se expressam, pensam e escutam e que tipos de dificuldade eventualmente apresentam, e aja pedagogicamente considerando essa verificação.

Fique atento

Os boxes *Fique atento* chamam atenção para algo que está sendo apresentado ou retomam definições ou nomenclaturas já vistas pelos estudantes no Ensino Fundamental. Nesses boxes também são dadas dicas para auxiliá-los no estudo ou na resolução de uma atividade.

Sobre o assunto

Um boxe de destaque nesta coleção e que aparece em diversos momentos ao longo do capítulo é o *Sobre o assunto*. Como já dissemos, os estudantes do Ensino Médio devem ter autonomia nos estudos e precisam compreender que é possível aprender dentro e fora do ambiente escolar. Por isso, fornecemos referências complementares nesses boxes (informações, curiosidades e sugestão de textos, vídeos, simuladores, museus, entre outros), nas quais eles podem aprofundar os estudos além do livro didático e realizar pesquisas.

Você pode propor aos estudantes apresentações de seminários (discussão e solução de casos) ou aulas invertidas para que eles compartilhem com os colegas o fruto

das descobertas que fizeram. Eles também podem criar questionamentos com as novas informações, propondo-os à turma.

Glossário

O *Glossário* traz a definição de algumas palavras ou expressões da língua portuguesa. Mas, naturalmente, cada estudante tem autonomia para pesquisar qualquer outra palavra que for desconhecida para ele no contexto aplicado.

Atividades resolvidas

Nas seções *Atividades resolvidas*, os estudantes encontram a resolução detalhada e comentada de atividades e problemas. Em alguns momentos, identificados com o título *Resolvida passo a passo*, a resolução dos problemas é estruturada em etapas e passos inspirados nas quatro fases de trabalho com um problema, propostas por George Polya.

Esse tipo de resolução detalhada não deve ser visto como um modelo que os estudantes apenas imitam, mas como inspiração e indicação de possíveis estratégias. Você, que conhece a realidade dos estudantes e acompanha continuamente o desenvolvimento das aprendizagens, pode usar essas seções com múltiplos propósitos. Entre eles, pode-se propor a resolução da atividade ou do problema, vivenciando a experiência de verificar a compreensão dos conteúdos, e, depois, que comparem a própria resolução com a apresentada nas seções. Nesses momentos, observe como eles se expressam, tanto do ponto de vista das estratégias que aplicam e da solução a que chegam como da linguagem e argumentação matemática que utilizam.

Atividades

Nas seções *Atividades* há uma seleção de atividades e problemas, com diferentes graus de dificuldade, que levam os estudantes a desenvolver as habilidades da BNCC previstas para o capítulo. Avalie o desenvolvimento de cada um deles e as sugestões que apresentamos nas *Orientações específicas* deste Manual e os norteie de quais atividades serão propostas ou quais podem ser desenvolvidas individualmente, em dupla ou em grupo. Nas atividades que propõem a elaboração de problemas, recomendamos que as metodologias descritas no tópico “Elaboração de problemas” deste Manual sejam aplicadas de acordo com a realidade de cada grupo de estudantes.

Tecnologias digitais

Nas seções *Tecnologias digitais*, os estudantes podem vivenciar todos os conceitos que apresentamos nestas *Orientações gerais*, no tópico destinado a esse assunto, utilizando diversas tecnologias, construindo representações gráficas e representações geométricas, calculando medidas estatísticas, compondo planilhas eletrônicas e simulações financeiras, e muito mais. Você perceberá que, em muitos capítulos, propomos essas seções antes da formalização dos conteúdos correspondentes para que os estudantes possam, de fato, explorar e investigar os conceitos, de certa maneira, desconhecidos, fazendo simulações e conjecturando sobre comportamentos observados. Além de propostas tecnológicas serem atrativas aos jovens, entendemos que com esse tipo de desenvolvimento protagonista, as aprendizagens se tornam cada vez mais significativas e aplicadas.

Prepare-se previamente para o trabalho com essas seções: mapeie os dispositivos que precisarão estar disponíveis e a internet, se for necessário utilizá-la no momento da aula. Conheça os *softwares* ou aplicativos que serão trabalhados para que possa auxiliar os estudantes sempre que for preciso. No caso do GeoGebra, por exemplo, que é proposto como ferramenta tecnológica na maioria dos volumes desta coleção, há a possibilidade de usá-lo *on-line* ou baixá-lo em um computador ou *smartphone*; lembre-se que cada plataforma tem as próprias particularidades. Já o aplicativo Calc do LibreOffice, que também é proposto em alguns volumes, deve ser baixado em um computador.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

É possível encontrar na internet diversos tutoriais de uso do *software* GeoGebra, bem como atividades já construídas e que podem proporcionar aos estudantes um momento inicial de conhecimento da plataforma escolhida ou um momento final, de ampliação das propostas didáticas apresentadas no Livro do Estudante.

Por exemplo, o documento disponível em http://static.geogebra.org/help/docuapt_BR.pdf (acesso em: 24 ago. 2020) foi elaborado pelo criador do GeoGebra, Markus Hohenwarter, e traz explicações sobre as principais funcionalidades, ferramentas e sintaxes do *software*.

O Instituto Internacional Geogebra (IGI, do inglês *International GeoGebra Institute*) é a organização sem fins lucrativos por trás do Geogebra, com sede em diversos países, que busca agregar interessados em utilizar esse *software* como ferramenta de ensino e aprendizagem. No Brasil há diversos institutos membros do IGI, como de Goiás, de Minas Gerais, do Rio de Janeiro, do Rio Grande do Norte e de São Paulo. Busque nos sites desses institutos, ou em publicações feitas por eles, videotutoriais e textos que vão auxiliar a utilização desse *software* em ambiente escolar.

Para a planilha eletrônica LibreOffice, também é possível encontrar tutoriais de uso na internet. Destacamos o *Guia de introdução*, produzido pela equipe de documentação do próprio *software* (disponível em: <https://documentation.libreoffice.org/assets/Uploads/Documentation/pt-br/GS50/GS50-Introducao-LO-5.0-ptbr.pdf>; acesso em: 24 ago. 2020). O capítulo 5 desse guia explica os elementos e as ferramentas do aplicativo Calc, que são semelhantes aos de muitas outras planilhas eletrônicas.

Conexões

As seções *Conexões* trazem temas relevantes e atuais que se relacionam com os conteúdos do capítulo em estudo e mostram aplicações da Matemática. Muitas vezes essas seções permitem também um trabalho integrado com outras áreas do conhecimento, em especial com Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Para que as competências específicas e as habilidades vinculadas a essas seções sejam desenvolvidas, pode ser oportuno propor uma aula em conjunto com os professores das áreas do conhecimento abordadas.

Nas atividades que envolvem pesquisas nessas seções, também pode ser oportuna a aplicação de metodologias ativas, como a discussão e solução de casos, enriquecendo as propostas sobre fatos ou casos específicos.

Leitura e compreensão

Nas seções *Leitura e compreensão*, a interpretação dos diferentes textos apresentados aos estudantes e a resolução das questões propiciam o desenvolvimento da competência leitora e da leitura inferencial ao mesmo tempo que ampliam e enriquecem os conhecimentos. Em algumas dessas seções também pode ser oportuno organizar uma aula em conjunto com professores de outras áreas do conhecimento.

Além da sala de aula

Nas seções *Além da sala de aula*, apresentamos separadamente propostas didáticas diferenciadas com o intuito de aproximar os estudantes de realidades de fora da sala de aula.

Algumas dessas seções mobilizam conhecimentos e saberes matemáticos desenvolvidos e utilizados por diferentes comunidades, promovendo debates acerca da etnomatemática, da importância dela e dos limites e potencialidades que ela proporciona no mundo real.

Em outras seções *Além da sala de aula*, os estudantes também têm a oportunidade de investigar questões e propor ações que sejam significativas para a comunidade escolar da qual fazem parte; nesse caso, faça um levantamento prévio de como essa extrapolação para além do espaço escolar pode ser feita e se os familiares dos estudantes precisarão autorizar ou auxiliar as ações.

Em algumas seções *Além da sala de aula*, os pilares do pensamento computacional (reconhecimento de padrões, decomposição, algoritmo e abstração) são desenvolvidos em análises, compreensões, modelagens e automatizações de resoluções de problemas relacionados aos conteúdos que estão sendo estudados. Para

alguns dos trabalhos com algoritmos nesta coleção, conjuntamente com os outros pilares, optamos por utilizar a escrita usando pseudocódigos – linguagens simples que são escritas sem utilizar uma linguagem de programação específica. Essa escolha permite a utilização da lógica das linguagens de programação para implementar algoritmos, sem de fato precisar recorrer às sintaxes de cada uma delas. Além disso, o uso do pseudocódigo traz o benefício de que, se o projeto pedagógico da escola ou os próprios estudantes optarem por ampliar os estudos nessa área, pode ser “traduzido” para a linguagem de programação escolhida.

Mas vale ressaltar que o pensamento computacional é desenvolvido ao longo dos seis volumes desta coleção, não apenas nessas seções, que oportuniza um trabalho destacado com os processos cognitivos envolvidos, mas também em outras atividades e propostas no decorrer dos capítulos.

Vestibulares e Enem

Por fim, na última seção de cada capítulo, *Vestibulares e Enem*, os estudantes têm a oportunidade de conhecer e resolver atividades e problemas extraídos do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e de vestibulares de todas as regiões do Brasil.

Como o Ensino Médio é a última etapa da Educação Básica, é nessa fase que muitos deles decidem, ou começam a decidir, os próximos passos, seja no caminho acadêmico, seja no profissional. Assim, conhecer questões que constam nos processos de ingresso no Ensino Superior os auxiliará nessa preparação. Além disso, uma mesma questão pode mobilizar diversos conteúdos estudados ou apresentar linguagens um pouco diferentes das usadas nos livros didáticos com que eles estudaram ao longo da Educação Básica, e eles precisam estar preparados e se sentirem seguros para compreender os enunciados, relacionar os conteúdos e resolver as questões.

Respostas

Quando um estudante termina uma atividade ou resolve um problema, é natural que pense “Será que fiz corretamente?”; assim, para que ele possa conferir a resposta, apresentamos nessa seção as respostas das seções *Atividades* e da seção *Vestibulares e Enem* de cada capítulo do volume. Como foi dito no tópico “Avaliação em Matemática: Como e o quê avaliar?” destas *Orientações gerais*, o “erro” assume caráter de pista na prática investigativa docente. Assim, caso o estudante não tenha acertado

determinada atividade, é oportuno que ele procure refazer os raciocínios e os cálculos, buscando pistas que o levem a compreender onde e por que errou, e você pode observá-lo durante esse diagnóstico, intervindo se necessário. Ele também poderá conversar com os colegas e compreender as estratégias que eles utilizaram, o que também permite desenvolver o próprio conhecimento de maneira contínua.

Lista de siglas das atividades extraídas de provas oficiais

Momento no qual apresentamos o significado de todas as siglas das provas oficiais apresentadas ao longo do volume.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Conhecer a fundo as propostas de aprendizagens essenciais previstas na BNCC é importante não apenas para os professores e corpo diretivo escolar, mas também para os estudantes, para que compreendam os processos atuais de reestrutura da educação e os direitos de aprendizagem e desenvolvimento previstos para cada etapa da Educação Básica. Além disso, com a maturidade da faixa etária da qual eles fazem parte, agora no Ensino Médio eles têm a oportunidade de não apenas conhecer esses elementos, como também acompanhar e agir de modo a mobilizar o desenvolvimento das competências e das habilidades previstas para o volume em estudo.

Por isso, nessa seção do Livro do Estudante, inserimos um texto de apresentação da BNCC seguido dos textos na íntegra das competências gerais favorecidas ao longo dos seis volumes desta coleção, bem como os textos de todas as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias e de outras áreas do conhecimento que são favorecidas nos volumes.

Referências bibliográficas comentadas

Para escrever uma coleção, é preciso ler e pesquisar muito. Nessa seção do Livro do Estudante, listamos as referências bibliográficas utilizadas para a elaboração do livro tecendo comentários para cada uma delas. Desse modo, os estudantes não apenas observam uma lista de materiais, mas também entendem onde e por que cada referência bibliográfica foi utilizada no volume.

Referências complementares para aprofundamento

Além das novas exigências que são trazidas para a sala de aula pelos estudantes e pela sociedade, teorias e práticas de Educação matemática passam constantemente por debates, discussões, atualizações e alterações que são fruto do trabalho contínuo de grupos de estudo e de aplicação. Você, professor, é parte desse processo de renovação, sendo corresponsável por apresentar novas situações aos estudantes, debater alternativas e soluções para os problemas que surgem e aplicar o que foi proposto em ambiente escolar, chegando a novos resultados.

A facilidade da internet nos permite acessar documentos oficiais, portais, publicações, artigos científicos, fóruns de discussão e diversos outros materiais para constante aprofundamento, estudo e pesquisa. Também podemos contar com cursos oferecidos por instituições de ensino, centros de pesquisa, e até mesmo pelo poder público, presenciais ou *on-line*, que podem aprofundar aspectos da atividade de docência e oferecer a chance de compartilhar conhecimentos e experiências com outros professores e pesquisadores.

Extraídas desse universo de possibilidades e escolhas, reunimos a seguir algumas sugestões de referências. Em conjunto com as sugestões dadas nos boxes *Mais sobre o assunto* apresentados ao longo tanto destas *Orientações gerais* como das *Orientações específicas* deste Manual, essas referências visam auxiliar nesse processo de formação continuada e aprofundamento. As referências bibliográficas comentadas, no fim deste Manual, também oferecem subsídios de materiais que não apenas recomendamos, como utilizamos no decorrer da elaboração desta coleção.

► Sites e jogos

Canal do educador. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/>.

Portal com orientações para pais e educadores sobre diversos aspectos de ensino.

Coleção Matemática Multimídia. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/>.

Portal que contém recursos educacionais multimídia de Matemática para o Ensino Médio, em formato digital, desenvolvidos pela Universidade de Campinas (Unicamp).

Jogos no ensino de Matemática. Disponível em: <https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/jogos-no-ensino-de-matematica/>.

Nesse site você encontra diversos jogos matemáticos para o Ensino Médio, com objetivos, regras e tabuleiros e peças para impressão.

Math Playground. Disponível em: https://www.mathplayground.com/game_.

O site, em inglês, contém uma série de jogos matemáticos que abarcam diferentes disciplinas. Os jogos são simples e trabalham com conhecimentos específicos. Para o Ensino Médio, recomendamos explorar as seções de Geometria (*Geometry*), jogos lógicos (*logic games*) e contextualização do uso da Matemática no mundo real (*real world Math connections*).

Olímpiada Brasileira de Matemática. Disponível em: <https://www.obm.org.br/>.

Nesse site você pode obter informações, provas e gabaritos da competição que é dirigida a estudantes de todo o país, a partir do 6º ano.

Reprodução/www.obmep.org.br



Olimpíada Brasileira de Matemática

Portal do aprendiz. Disponível em: <https://portal.aprendiz.uol.com.br/>.

Site, destinado a professores e estudantes, com notícias e artigos de diversas áreas do conhecimento.

Portal do Inep. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br>.

Site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), que responde pelas avaliações do Sistema Educacional Brasileiro (todos os níveis e modalidades), com todas as informações relativas ao Enem.

Portal do professor. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>.

Espaço para acessar sugestões de planos de aula, mídias de apoio, notícias sobre educação e iniciativas do MEC. Nele você também pode compartilhar planos de aula, participar de debates ou fazer cursos.

Projecto Pólya. Disponível em: https://cmup.fc.up.pt/cmup/polya/polya_home.html.

Site do Centro de Matemática da Universidade do Porto (Portugal) especializado na resolução de problemas matemáticos.

Planeta Educação. Disponível em: <https://www.vitaebrazil.com.br/plannetaeducacao/>.

Portal educacional que tem como objetivo disseminar o uso pedagógico e administrativo das novas tecnologias da informação e da comunicação nas escolas públicas brasileiras de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

*Todos os sites foram acessados em: 24 ago. 2020.

Power My Learning. Disponível em: <https://powermylearning.org/>.

Site, em inglês, dedicado à modernização do ensino. Oferece jogos e atividades em diversas áreas, como de tecnologias, Matemática, ciências e artes, disponibilizando conteúdo específico para Ensino Médio.

Só Matemática. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/>.

Esse *site* contém conteúdos matemáticos e sugestões de uso de tecnologias e jogos em sala de aula.

The Euler Archive. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org/>.

Biblioteca digital contendo uma cópia dos trabalhos originais do matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Wolfram Alpha. Disponível em: <https://www.wolframalpha.com/>.

Similar a uma ferramenta de busca, esse *site*, em inglês, oferece um campo de entrada simples que deve ser preenchido com o “nome” do que se pretende encontrar. O que embasa esse sistema é o Mathematica, do cientista inglês Stephen Wolfram. O *site* oferece também soluções para problemas matemáticos complexos, porém toda a linguagem é em inglês.

Podcasts e vídeos

Lógica, Matemática e linguagem cotidiana. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=AQ5ueFO9SmA>.

Este vídeo, apresentado pelo professor titular da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP), Nílson José Machado, mostra algumas explicações a respeito dos conceitos de lógica.

Matemática Humanista. Disponível em: <https://www.matematicahumanista.com.br/podcast>.

Podcast mantido pelo educador e matemático brasileiro Carlos Eduardo Mathias Motta (1968-), com debates principalmente sobre o ensino de Matemática, com temas como Etno-matemática, dimensões éticas das práticas matemáticas, avaliação, uso pedagógico da calculadora, entre outros.

Minuto IBGE. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/minuto-ibge.html>.

Podcasts curtos, em torno de um minuto cada um deles, trazendo dados e curiosidades obtidos através das informações produzidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Novos áudios são lançados semanalmente e disponibilizados gratuitamente para todas as emissoras de rádio brasileiras.



Reprodução/IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

Nada Sei. Disponível em: <https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/conteudos/podcast.html>.



Reprodução/https://institutoayrtonsenna.org.br/

Podcasts mantidos pelo Instituto Ayrton Senna, que tratam de aspectos distintos da educação no Brasil.

Portal Domínio Público. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>.

Nesse *site* são disponibilizados vídeos que auxiliam o professor no trabalho em sala de aula.

Reprodução/<http://www.dominiopublico.gov.br/>



TV Escola. Disponível em: <https://tvescola.org.br/assista/>.

O portal do TV Escola disponibiliza vídeos com variadas aplicações de conteúdos em situações simples do dia a dia.

Softwares

Conteúdos Digitais da UFF. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/>.

A seção de conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística, ligada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF-RJ), disponibiliza *softwares* educacionais, experimentos educacionais e atividades em áudio relacionadas à Matemática do Ensino Médio.

Só Matemática. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/softwares.php>.

Busque nesse *site* pela seleção de aplicativos que podem ser úteis em atividades escolares diárias.

Revistas e boletins de Educação matemática

Bolema. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>.

Boletim de Educação matemática (Bolema) publicado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp), *campus* de Rio Claro (SP).

Boletim Gepem: série Reflexão em Educação matemática. Disponível em: <http://r1.ufrjr.br/gepem/>.

Publicações do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (Gepem) e do Mestrado em Educação Matemática da Universidade de Santa Úrsula (RJ). Para acesso, é necessário cadastro no *site*.

Coleção Explorando o Ensino: Matemática. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12583-ensino-medio>.

Coletânea de artigos extraídos da Revista do Professor de Matemática (RPM), uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com apoio da Universidade de São Paulo. O material disponível está dividido em três volumes e o conteúdo consiste em exemplos aplicados ao cotidiano, História da Matemática, atividades, entre outros.

Periódicos da Sbem. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/>.

Publicações de periódicos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem) sobre Educação matemática.

Revista EMP. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp>.

A revista Educação Matemática Pesquisa (EMP), do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, faz quadrimestralmente divulgações científicas da área, em âmbito internacional.

Revista Brasileira de História da Matemática. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/>.

Site com as publicações da revista Brasileira de História da Matemática, da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat).

Revista Zetetiké. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/>.

Revista da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, em parceria editorial com a UFF-RJ, com publicações sobre o desenvolvimento de pesquisas na área da Educação matemática e para a formação de pesquisadores dessa área.



Capa da revista Zetetiké, v. 27, 2019.

RPM. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/>.

Revista do Professor de Matemática (RPM), da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com diversas publicações da área.

Livros

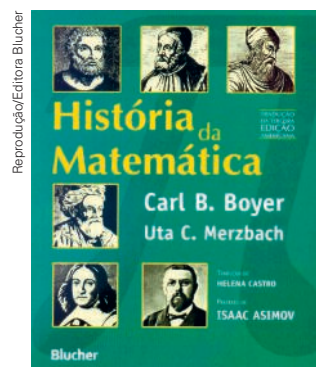
História da Matemática

BERLINGHOFF, W. P. *A Matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Edgar Blucher, 2008.

Nesse livro, o autor apresenta um panorama de pessoas e eventos importantes na história e construção da Matemática atual.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blucher: Edusp, 1974.

Uma grande referência em História da Matemática, esse livro apresenta cronologicamente a evolução da Matemática desde a origem do conceito dos números até as descobertas matemáticas do século XX.



Capa do livro *História da Matemática*, de C. B. Boyer.

CARVALHO, D. L. de; MIGUEL, A.; MENDES, I. A.; BRITO, A. de J. *História da Matemática em atividades didáticas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

Nesse livro, dedicado a contribuir no trabalho do professor de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio, o ensino da Matemática é abordado por meio de atividades nas quais a História da matemática exerce um papel central.

CARVALHO, L. M. et al. (org.). *História e tecnologia no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.

O livro apresenta uma coletânea de trabalhos sobre temas da Matemática, com debates sobre a qualidade da Educação Básica no Brasil, e apresentando modelos de ensino que visam a melhoria na formação dos estudantes.

COLEÇÃO Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula. Vários autores. São Paulo: Atual, 1993. 6 v.

Coleção de seis volumes cujos temas números e numerais, computação, Geometria, Álgebra, Trigonometria e Cálculo são apresentados sob a perspectiva histórica. Para alguns temas, também apresenta propostas de materiais para a utilização da História da Matemática nas aulas.

EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

Um grande referencial da História da Matemática, esse livro apresenta narrativas históricas desde a Antiguidade, contextualizados em panoramas culturais da época abordada.

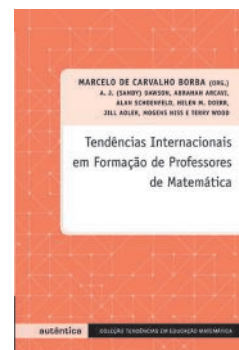
MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. *História na Educação matemática*: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

Nesse livro, os autores abordam, de maneira acessível, a História da Matemática, a história da Educação matemática e como ambas podem se relacionar com a Educação matemática.

Educação matemática

BORBA, M. de C. *Tendências internacionais em formação de professores de Matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

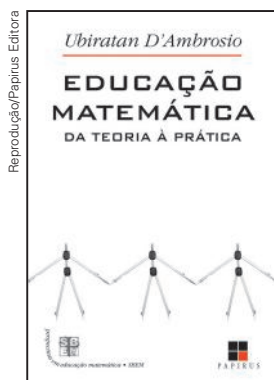
Capa do livro *Tendências internacionais em formação de professores de Matemática*, de M. de C. Borba.



O livro apresenta a experiência de alguns trabalhos de Educação matemática desenvolvidos internacionalmente, relacionando-os com a realidade do ensino brasileiro. Também é debatido nesse livro um trabalho de investigação sobre a formação de professores de Matemática no Brasil.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e Matemática*. São Paulo/Campinas: Summus/Unicamp, 1986.

Nesse livro, o autor apresenta um enfoque crítico do que se faz na Educação matemática em diferentes sistemas educacionais, refletindo sobre o relacionamento entre Matemática e bem-estar social.



Capa do livro *Educação Matemática: da teoria à prática*, de U. D'Ambrosio.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papyrus, 2002.

O livro explana sobre aspectos gerais da cognição e da natureza da Matemática, apresenta questões teóricas da educação e debate temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (org.). *A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Nesse livro, os autores demonstram a preocupação com a formação do professor que ensina Matemática, apresentando perspectivas sobre o tema e resultados de pesquisa de formação docente no campo da Educação matemática. Outros debates também são propostos, como a formação inicial e continuada de professores de Matemática e a relação dos docentes com o saber e com a prática pedagógica.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Apresentando práticas de investigação que podem ser levadas para as aulas de Matemática, como a criação de conjecturas, a reflexão e a formalização do conhecimento, esse livro traz resultados de pesquisas sobre as vantagens e as dificuldades de se trabalhar com tal perspectiva em Educação matemática.

POWELL, A.; BAIRRAL, M. *A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidades*. Campinas: Papyrus, 2006.

O livro exemplifica e disserta sobre como diferentes tipos de tarefas escritas podem auxiliar os estudantes no aprendizado matemático e no ensino e desenvolvimento profissional, tanto em sala de aula como em aulas à distância. Os autores

também ressaltam a utilização de diferentes tipos de atividade escrita com o propósito de os estudantes refletirem sobre as próprias experiências matemáticas vivenciadas.

POZO, J. I. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998.

De acordo com o que o autor propõe nesse livro, ensinar a resolver problemas em cada área do conhecimento significa enfatizar o ensino dos procedimentos e o papel fundamental do professor no incentivo da criação de estratégias por parte dos estudantes.

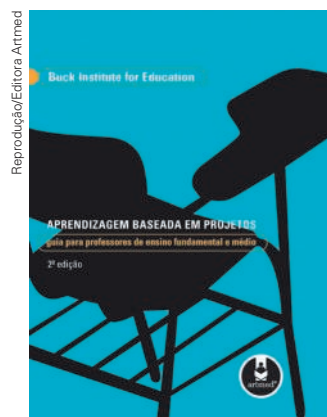
Metodologia do ensino de Matemática

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2006.

Partindo da conceituação informal da modelagem matemática até chegar à aplicação em problemas complexos e sofisticados, o autor demonstra como a modelagem pode ser aplicada às mais diversas situações, com distintos graus de dificuldade e precisão.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio*. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Livro concebido com o propósito de auxiliar os professores brasileiros a introduzir nas escolas a aprendizagem baseada em projetos. Para isso, descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos e apresenta exemplos de projetos e de ferramentas e recursos de auxílio na implementação deles.



Capa do livro *Aprendizagem baseada em projetos: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio*, de Buck Institute for Education.

PAIS, L. C. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

O autor propõe nesse livro uma reflexão sobre os aspectos metodológicos do ensino da Matemática, atento à subjetividade do processo cognitivo e à relação entre o saber matemático e os desafios inerentes às ações integradas ao ensino e aprendizagem escolar. Questiona, ainda, a linearidade do livro didático e os conceitos de ordem, clareza e formalidade.

SADOVSKY, P. *O ensino de Matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios*. São Paulo: Ática, 2007.

Nesse livro, a autora destaca a importância em dar sentido durante a construção dos saberes matemáticos para os estudantes.

Educação

FREIRE, P.; SHOR, I. *Medo e ousadia: o cotidiano do professor*. São Paulo: Paz e Terra, 2014.

De acordo com Paulo Freire: “Se os professores ou os alunos exercessem o poder de produzir conhecimento em classe, estariam então reafirmando seu poder de refazer a sociedade”. Nesse livro, os autores destacam a necessidade da visão colaborativa na construção do conhecimento.

DAYRELL, J. et al. *Juventude e Ensino Médio: sujeitos e currículos em diálogo*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livrocompleto_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf.

A obra traz uma análise da juventude brasileira, descrevendo as várias características que definem a condição juvenil. Também é apresentado um debate sobre o currículo para o Ensino Médio brasileiro.

MORIN, E. *A cabeça bem-feita: repensar a reforma, reformar o pensamento*. Lisboa (Portugal): Bertrand, 2009.

Nesse livro, o autor defende as razões pelas quais o ensino transdisciplinar é essencial para a formação de cidadãos capazes de lidar com o mundo atual.

PERRENOUD, P. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

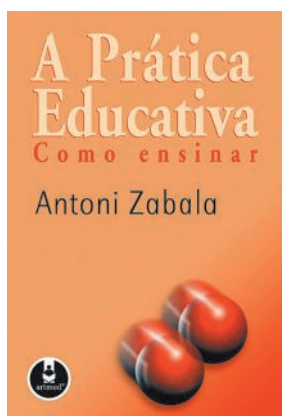
Esse livro apresenta perspectivas e limitações na prática em sala de aula para a construção de competências e a transposição didática.

VALENTE, J. A. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: o papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: *Tecnologia, currículo e projetos*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/1sf.pdf>.

Nesse capítulo do livro, o autor apresenta uma coleção de artigos referentes às novas maneiras de ensinar, aprender e desenvolver o currículo ao integrar diferentes tecnologias digitais à prática pedagógica voltada à aprendizagem significativa dos estudantes, que aprende ao fazer, levantar e testar ideias e ao experimentar, aplicar conhecimentos e representar o pensamento.

ZABALA, A. A *prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Capa do livro *A prática educativa: como ensinar*, de A. Zabala.



Reprodução/Editora Artmed

O autor propõe nessa obra pautas e orientações sobre a ação educativa a partir de uma perspectiva de análise e reflexão. Também enfatiza que as decisões devem ser tomadas levando-se em conta a função social do ensino e a concepção dos processos de aprendizagem.

Documentos oficiais

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio, Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>.

Antes da homologação da BNCC, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) constituíam os documentos norteadores dos principais conteúdos que deviam ser trabalhados nas escolas, em cada etapa, por área do conhecimento. Com base nesses documentos, as escolas elaboravam os currículos escolares considerando a realidade local na qual a escola estava inserida.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Coordenação Geral do Ensino Médio. *Programa Ensino Médio Inovador: documento orientador – elaboração de propostas de redesenho curricular*. Brasília, 2016/2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/fevereiro-2017-pdf/58611-doc-orientador-elaboracao-de-propostas-de-redesenho-curricular-prc-pdf/file>.

O Programa Ensino Médio Inovador é uma ação do MEC para a elaboração do redesenho curricular nas escolas de Ensino Médio de modo a desenvolver um currículo mais dinâmico e flexível, que contemple os conhecimentos das diferentes áreas, em uma perspectiva interdisciplinar e articulada à realidade dos estudantes, bem como às necessidades, às expectativas e aos projetos de vida deles.

MATRIZ de avaliação de Matemática: Pisa 2012. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf.

O Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa, do inglês *Programme for International Student Assessment*) é uma rede mundial de avaliação de desempenho escolar que objetiva a melhoria das políticas e dos resultados educacionais dos países. A matriz de avaliação de cada área do conhecimento avaliada norteia as expectativas e os parâmetros mínimos considerados pela organização.

Orientações específicas

O volume *Função afim e função quadrática* desta coleção está dividido em dois capítulos, os quais tratam, nessa ordem, das funções afins e das funções quadráticas.

No capítulo 1, *Função afim*, são retomados conceitos básicos de funções para então trabalhar, entre outros assuntos, características da função afim, como definição, zeros da função e representação gráfica no plano cartesiano.

No capítulo 2, *Função quadrática*, é feito um trabalho análogo ao do primeiro capítulo, abordando-se a definição da função quadrática, as técnicas de obtenção das raízes e a análise algébrica e gráfica dessa função, entre outros temas.

Para conduzir as aulas com este volume, a formação disciplinar do professor deve ser prioritariamente de Matemática. Para os capítulos 1 e 2, é possível desenvolver aulas em conjunto com professores das áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e de Linguagens e suas Tecnologias. Para isso, planeje antecipadamente essa participação. As possibilidades de trabalho em conjunto com outros professores em cada capítulo estão indicadas nos respectivos tópicos *Sugestões para o desenvolvimento das aulas* deste Manual.

Propomos que o desenvolvimento deste volume seja realizado ao longo de um semestre (aproximadamente 20 semanas). A sugestão de cronograma a seguir considera uma distribuição em semanas para os tópicos de cada capítulo. Essa distribuição foi pensada considerando os conteúdos, as atividades e as seções que serão desenvolvidas em cada tópico, mas é importante considerar a realidade da escola e da turma e, se necessário, ajustar o tempo previsto para os tópicos, bem como ampliá-lo caso seja possível desenvolver mais propostas de pesquisas e apresentações, metodologias ativas ou ações envolvendo a comunidade escolar.

Capítulo 1	Abertura A ideia de função	2 semanas
	A função afim	5 semanas
	Funções definidas por mais de uma sentença Vestibulares e Enem	3 semanas
Capítulo 2	Abertura A função quadrática	2 semanas
	Zeros de uma função quadrática	4 semanas
	Análise algébrica e gráfica da função quadrática Vestibulares e Enem	4 semanas

A BNCC neste volume

Nos capítulos deste volume, apresentamos conteúdos, atividades e seções que proporcionam aos estudantes o desenvolvimento de diversas competências gerais da Educação Básica, bem como de competências específicas e habilidades do Ensino Médio. Além disso, alguns Temas Contemporâneos Transversais também estão presentes em alguns momentos.

Conheça-os a seguir.

Capítulo 1	Competências gerais: CG01, CG07. Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05. Competências específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias: CECNT01, CECNT02. Habilidades de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT101, EM13MAT103, EM13MAT104, EM13MAT302, EM13MAT314, EM13MAT315, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT506, EM13MAT510. Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13LGG701, EM13CNT102, EM13CNT106, EM13CNT202, EM13CNT203, EM13CHS101, EM13CHS106. Temas Contemporâneos Transversais: • Ciência e Tecnologia; • Diversidade Cultural; • Educação Ambiental; • Educação para Valorização do Multiculturalismo nas Matrizes Históricas e Culturais Brasileiras; • Educação Fiscal.
Capítulo 2	Competências gerais: CG01, CG02, CG03, CG05. Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05. Competências específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias: CECNT01, CECNT02. Habilidades de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT402, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT506. Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13LGG602, EM13LGG701, EM13CNT107, EM13CNT202, EM13CNT204, EM13CNT308, EM13CHS106. Temas Contemporâneos Transversais: • Ciência e Tecnologia; • Diversidade Cultural; • Processo de Envelhecimento, Respeito e Valorização do Idoso; • Saúde.

Diferentemente de uma proposta curricular, a BNCC especifica os conjuntos de competências e habilidades as quais os estudantes devem desenvolver ao longo de toda a Educação Básica. Para que as propostas de aprendizagem da BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias na etapa do Ensino Médio sejam de fato bem-sucedidas, é necessário, então, saber as diferenças entre competências e habilidades e como elas se encadeiam.

Neste capítulo, por exemplo, é oferecida a oportunidade de mobilizar a CG07 da BNCC, cujo texto é apresentado a seguir.

(CG07) Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Essa competência pode ser trabalhada com os estudantes nas seções *Leitura e compreensão* (p. 43), intitulada “Fotossíntese”, e *Conexões* (p. 54), intitulada “Edifício sustentável inspirado em cupinzeiro”, no que

tange às propostas dadas aos estudantes de, na primeira seção, escrever uma breve redação sobre as diversas influências do CO₂ na natureza e na sociedade e, na segunda seção, na pesquisa sobre outras edificações sustentáveis e na escrita de um texto argumentativo sobre por que essas edificações são, de fato, sustentáveis.

Para uma argumentação bem-sucedida, que se baseie em fatos, dados e informações confiáveis, é necessário que o estudante saiba interpretar situações de diversos contextos, como os cotidianos, das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e das Ciências da Natureza e suas Tecnologias, entre outros. Por isso, outra maneira como essa competência geral é trabalhada neste volume é pelo favorecimento da CEMAT01 da área de Matemática e suas Tecnologias:

(CEMAT01) Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Parte do conjunto de estratégias, conceitos e procedimentos que os estudantes podem utilizar para interpretar diferentes situações que envolvam relações entre grandezas são as análises das taxas de variação e dos gráficos. Trabalho que é feito, frequentemente, ao longo deste volume, principalmente nas partes que tratam da taxa de variação da função afim e da construção de gráficos de funções afins e de funções definidas por mais de uma sentença. Desse modo, a CEMAT01 é favorecida, entre outros modos, pela habilidade EM13MAT101 da mesma área:

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza e suas Tecnologias que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Outra competência geral que pode ser desenvolvida neste volume é a CG01.

(CG01) Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Alguns dos conhecimentos historicamente construídos que podem ser de grande valia para entender e explicar a realidade são os diferentes registros de representação matemática, incluindo os geométricos e computacionais, conceitos que são trabalhados ao longo de toda esta coleção. Neste volume, em especial, a CG01 pode ser e é desenvolvida neste capítulo por meio da CEMAT04 da área de Matemática e suas Tecnologias, cujo texto é citado a seguir.

(CEMAT04) Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Entre várias oportunidades de mobilização dessa competência específica, cabe destacar o trabalho com o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF), que é feito na situação 1 do tópico “Funções definidas por mais de uma sentença” e é retomado na atividade 68 desse capítulo. O IRPF é um dos principais impostos cobrados

das pessoas físicas no Brasil, e a sua declaração, que ocorre anualmente, mobiliza parte do tempo de diversos trabalhadores brasileiros.

Com as atividades sobre IRPF deste capítulo, espera-se que os estudantes conheçam um pouco mais desse imposto, compreendendo o funcionamento e a importância dele. Além disso, a análise do significado das alíquotas e do cálculo dele é feita por meio da lei e da representação gráfica de funções definidas por mais de uma sentença. Desse modo, a CEMAT04 ocorre associada à habilidade EM13MAT404 da etapa do Ensino Médio da área de Matemática e suas Tecnologias.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Capítulo 1

Função afim

Este capítulo é dividido em três tópicos. No primeiro tópico, o estudante desenvolverá um estudo sobre a ideia de função, de maneira próxima, mas complementar, à proposta apresentada no volume que trata de função exponencial e função logarítmica desta coleção, de modo que a coleção permite o trabalho com os dois volumes sem uma ordem preestabelecida, deixando uma proposta flexível para você. No segundo tópico, será apresentada aos estudantes a função afim, sob uma óptica algébrica e geométrica, explorando as construções gráficas por meio de *software*. Por fim, no terceiro tópico, serão apresentadas as funções definidas por mais de uma sentença.

O conceito de função é considerado um dos mais importantes e úteis em Matemática, pois, o estudo de funções propiciou um grande avanço no desenvolvimento tecnológico em diferentes áreas do conhecimento. Por meio de modelagem matemática, o trabalho com funções possibilita atribuir tratamento matemático a situações da realidade, permitindo a compreensão de fenômenos e a ação sobre suas manifestações. Por isso, este capítulo trabalha, majoritariamente, com uma abordagem teórico-metodológica voltada à modelagem e à análise de problemas relacionados a contextos diversos, em especial àqueles relacionados a situações que são ou podem vir a ser parte do cotidiano do estudante ou de outras pessoas da comunidade dele, utilizando os conceitos de funções afins e de funções definidas por mais de uma sentença.

Nessa linha, são apresentadas atividades contextualizadas nas mais diferentes situações, como as relacionadas a situações econômicas, sociais e a fatos relativos às Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cuja análise pode ser feita, entre outras maneiras, utilizando taxas de variação e/ou gráficos que relacionem duas grandezas pertinentes aos problemas, permitindo assim o trabalho com a habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias EM13MAT101.

É importante destacar a importância da contextualização no ensino de Matemática. A prática da Matemática contextualizada permite aos indivíduos compreendê-la como parte das estratégias que eles podem usar no cotidiano. No entanto, é necessária especial atenção ao fato de que indivíduos em diferentes culturas vivem diferentes contextos. Por isso, na seção *Além da sala de aula* sobre as flautas Rikbaktsa, a Matemática contextualizada é uma oportunidade de trabalhar aspectos da Etnomatemática, valorizando alguns modos como outras culturas, além daquelas dos centros urbanos, utilizam a Matemática para compreender e analisar o mundo.

Durante o trabalho com este capítulo, incentive os estudantes a aplicar os conhecimentos e habilidades aprendidos em contextos significativos. Para isso, eles podem buscar situações a serem analisadas usando dados de livros, jornais ou revistas, por exemplo, favorecendo também a leitura e a interpretação de textos, tabelas e gráficos.



Sergio Pedreira/Pulsar Imagens

Outra abordagem utilizada neste capítulo é a do uso da informática como ferramenta de ensino, em especial, no estudo e na construção dos gráficos de funções afins e de funções definidas por mais de uma sentença. Essa abordagem é favorecida, nas seções *Tecnologias digitais* deste capítulo, com o uso do *software* de Geometria dinâmica GeoGebra, disponível *on-line*, e do *software* LibreOffice Calc.

Por meio desses *softwares*, os estudantes poderão, por exemplo, construir gráficos dessas funções no plano cartesiano e analisar como alterações nos coeficientes angular e linear da função afim se refletem no posicionamento da reta que representa o gráfico dessa função no plano cartesiano.

O GeoGebra também é usado para construir o gráfico de uma função no plano cartesiano definida por várias sentenças de duas maneiras, ambas usando a função **Se** desse programa. Em especial, a segunda maneira, que utiliza a função **Se** como parâmetro de outra função **Se**, dá abertura na seção *Além da sala de aula* para o trabalho com o pilar de algoritmo do pensamento computacional.

O pensamento algébrico é parte importante do desenvolvimento matemático no Ensino Fundamental, em especial nos Anos Finais, nos quais os estudantes retomam e aprofundam conceitos como os de variáveis numéricas, regularidades em sequências e reconhecimento da relação entre duas grandezas. Isso é evidenciado na BNCC pelas habilidades destinadas a esses temas nos Anos Finais do Ensino Fundamental, como a EF08MA07 e a EF09MA09.

Objetivos

- Recordar o conceito de função e compreender o conceito de função afim.
- Analisar diferentes situações reais que podem ser modeladas por funções, em especial funções afins.
- Entender a ideia de função e de função afim e algumas das propriedades delas.
- Resolver e elaborar problemas utilizando o conceito de função afim e algumas propriedades.
- Conhecer o início histórico do estudo de funções afins.
- Construir, interpretar e analisar o gráfico de funções afins, utilizando ou não tecnologias digitais.
- Converter representações algébricas de funções afins em representações geométricas, e vice-versa.
- Analisar conjuntos de dados e reconhecer quando esses dados podem ser modelados por uma função afim.
- Construir modelos utilizando funções afins para resolver problemas.
- Analisar contextos que podem ser modelados por funções definidas por mais de uma sentença.

- Converter representações algébricas de funções definidas por mais de uma sentença em representações geométricas, e vice-versa.
- Construir gráficos de funções definidas por mais de uma sentença utilizando tecnologias digitais.

Justificativa

Compreender o mundo e a realidade ao redor é uma necessidade do ser humano. É por meio dessa compreensão que o indivíduo pode tomar decisões alicerçadas em fatos e agir de maneira informada e democrática.

Um dos aspectos dessa compreensão é a habilidade de compreender a relação entre diferentes grandezas e analisá-la. Para isso, são necessárias ferramentas algébricas associadas às funções, como o reconhecimento de diferentes tipos de funções, a construção e análise de gráficos de funções no plano cartesiano e a compreensão dos efeitos dos coeficientes das funções em seus comportamentos gráficos.

Espera-se, portanto, que, com este capítulo, no qual são trabalhadas as funções afins e as funções definidas por mais de uma sentença, os estudantes possam analisar situações reais que podem ser modeladas por essas funções.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas

Neste tópico, apresentaremos mais sugestões de abordagens, específicas para o capítulo, pensando nas propostas pedagógicas que motivaram a elaboração dos conteúdos, das atividades e das seções do capítulo.

AValiação DA APRENDIZAGEM

Considerando a concepção desta coleção em relação à maneira como as avaliações devem ser (formativas e continuadas, como explicado nas *Orientações gerais* deste Manual), sugerimos que sejam organizados momentos avaliativos ao longo do trabalho com este capítulo, aliados a uma avaliação final, de modo a garantir uma efetiva aprendizagem.

No tópico “A função afim”, por exemplo, os estudantes, mediados por você, podem analisar e mensurar as próprias capacidades de converter representações algébricas de funções afins em representações gráficas, e vice-versa. Você poderá, então, adaptar o trabalho em sala de aula considerando esses resultados, podendo, assim, melhorar o aprendizado deles. Nesse caso específico, essa capacidade de conversão é fundamental para o trabalho com funções definidas por mais de uma sentença, o que justifica esse processo de avaliação e adaptação.

Além disso, considerando a mobilização de diversos conteúdos aprendidos que as questões de exames de larga escala podem oferecer, avalie a possibilidade de requisitar aos estudantes atividades da seção *Vestibulares e Enem* durante o trabalho com os tópicos deste capítulo ou ao término dele. Por exemplo, ao final do trabalho com o tópico “A função afim”, selecione algumas atividades da seção *Vestibulares e Enem* sobre esse tema (como as atividades 1 a 3, 5 e 6) e peça aos estudantes que as resolvam, de modo que você possa avaliar como está o desenvolvimento das habilidades dos estudantes em relação a esse tema.

Abertura

A situação de abertura deste capítulo visa instigar os estudantes em um processo de investigação sobre a produção de energia elétrica pela Usina Binacional de Itaipu, localizada em Foz do Iguaçu (PR). Tal abordagem temática enquadra-se no Tema Contemporâneo Transversal “Ciência e Tecnologia”.

Maia Facchini/Shutterstock



Usina Binacional de Itaipu, em Foz do Iguaçu (PR). Essa usina é importante não só pela alta produção de energia, que supre parte da demanda energética do Brasil e do Paraguai, mas também por produzir energia limpa e de maneira sustentável. Foto de 2019.

Neste contexto, desenvolva com os estudantes uma investigação cujo intuito seja o de estimar a produção energética acumulada de Itaipu a partir do ano de 2019, considerando uma produção anual de 80 000 GWh. No processo de investigação, você pode conduzir os estudantes a relacionar os valores encontrados com uma função afim (sem ainda defini-la de maneira formal), explorando a ideia de uma grandeza cuja medida é dada pela soma de um valor inicial e um valor variável que, nesse caso, aumenta a cada ano que passa. Ao final, o estudante deverá ser capaz de interpretar os resultados algébricos e geométricos desenvolvidos na atividade de investigação.

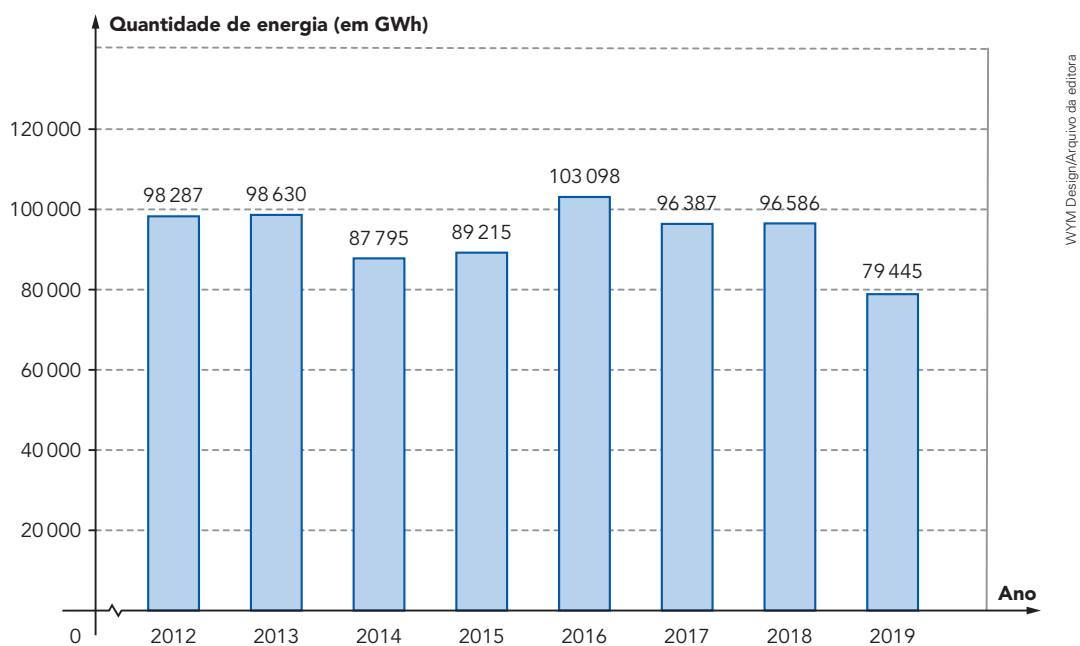
Durante esse processo, discuta com os estudantes aspectos históricos envolvidos na construção da Usina de Itaipu, desenvolvendo assim a competência geral CG01, em um processo de valorização do conhecimento histórico para compreender e explicar a realidade.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Caso queira aprofundar a discussão sobre a história da Itaipu Internacional e detalhes do funcionamento dela, inclusive da quantidade de energia produzida, sugerimos a consulta ao *site* oficial dessa usina, disponível em: <https://www.itaipu.gov.br/>. Acesso em: 3 set. 2020.

Após finalizarem o trabalho com a abertura, sugerimos que apresente aos estudantes a produção anual energética de Itaipu em GWh entre 2012 e 2019, mostrada no gráfico abaixo, e proponha uma discussão entre eles sobre a escolha do valor 80 000 GWh como a estimativa de produção anual de energia nessa usina. Espera-se que os estudantes percebam que esse valor é próximo ao último valor conhecido de produção energética, que é o de 2019, mas, como mostra o gráfico, ele é relativamente menor do que o dos outros anos. Segundo o *site* oficial da usina, essa diferença é decorrente do fato de que 2019 foi um dos anos mais secos na história da usina.

Produção anual de energia de Itaipu, em GWh



Fonte de consulta: ITAIPU BINACIONAL. Disponível em: <https://www.itaipu.gov.br/energia/geracao/>. Acesso em: 3 set. 2020.

Caso deseje, você pode convidar os estudantes a obterem outra estimativa para a produção energética anual utilizando, por exemplo, a média dos valores de 2012 a 2019, e então construir um novo modelo de estimativa de produção energética acumulada de Itaipu para compará-los.

► A ideia de função

Neste tópico, é desenvolvida e explorada em diferentes contextos a ideia de função, de maneira algébrica, ao associar e comparar grandezas.

Na situação 1, é apresentada a produção de sucos em uma fábrica para que os estudantes possam associar a ideia de função com o funcionamento de uma máquina que, por meio de uma série de procedimentos, transforma uma matéria-prima (no caso, uma fruta) em um produto final (no caso, suco e purê). Trabalhe com os estudantes o fato de que a analogia se estabelece nesse exemplo porque as funções também relacionam um valor a outro valor.

Na situação 2, conduza os estudantes numa atividade investigativa a respeito da dose administrada de certo remédio (em gotas) e a relação com a medida de massa da criança que irá ingerir tal medicamento. O objetivo dessa situação é permitir ao estudante observar a relação entre a quantidade de gotas de um remédio e a medida de massa da criança que será medicada, estabelecendo assim uma relação matemática entre essas duas grandezas. Chame a atenção para o box *Fique atento* (p. 12), a respeito da importância de nunca se automedicar, já que essa é uma prática considerada incorreta por profissionais da saúde. Nesta situação, o Tema Contemporâneo Transversal “Saúde” pode ser contemplado, assim como a habilidade EM13MAT314 na resolução de um problema que envolve grandezas dadas em termos uma da outra.

Na situação 3, é desenvolvida com os estudantes uma atividade investigativa sobre a medida de distância percorrida por um veículo, de modo a explorar a relação entre a quantidade de combustível no tanque de um veículo e a medida de distância máxima percorrida utilizando essa medida de volume de combustível. Nesta situação, os estudantes também desenvolvem a EM13MAT314 ao identificar e trabalhar com a medida de velocidade e a relação entre ela, a medida de distância percorrida e a medida de intervalo de tempo.

Por fim, na situação 4, é proposto um estudo sobre uma função que represente o valor pago em um estacionamento. Devido ao modo pelo qual o valor é cobrado em função da quantidade de horas em que o carro ficou estacionado, essa relação é descrita não por uma função afim, mas por uma função definida por mais de uma sentença. Apesar de esse assunto ser tratado na terceira parte desse capítulo, aproveite essa situação para incentivar os estudantes a escreverem no item **d** a lei dessa função da maneira que preferirem, destacando assim diferentes formas de expressar a lei de uma função (utilizando, inclusive, a linguagem corrente).

Nessas situações, é favorecida a habilidade EM13MAT314 na identificação de relação entre grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras. Além disso, a habilidade EM13MAT101 é contemplada

ao interpretar criticamente situações econômicas com o olhar da Matemática, e a habilidade EM13MAT302 é contemplada no trabalho de modelagem de situações utilizando funções afins para resolver diversos problemas.

Após o trabalho com as situações, o tópico “Explorando a ideia de função” apresenta três exemplos com os quais os estudantes podem realizar investigações e analisar relações expressas em diferentes contextos.

No segundo exemplo, os estudantes fazem o estudo de uma tabela para compreender a relação entre a medida de comprimento do lado de um quadrado e a medida de comprimento do perímetro desse polígono, é dada uma base para um futuro trabalho com a habilidade EM13MAT506, no que tange à análise da relação entre medida de comprimento do perímetro e medida de comprimento do lado de polígonos regulares.

No terceiro exemplo do tópico “Explorando a ideia de função” e os boxes *Fique atento* (p. 15), os algoritmos são utilizados para permitir aos estudantes explorar a ideia de função. Reforce com eles que os algoritmos são sequências de passos ou regras simples para obter soluções gerais a determinados problemas ou situações.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Caso deseje conhecer mais sobre o trabalho com pensamento computacional, sugerimos os seguintes documentos.

BRACKMANN, C. P. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica*. 2017. 226f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/172208>. Acesso em: 4 set. 2020.

BROOKSHEAR, J. G. *Ciência da computação: uma visão abrangente*. Porto Alegre: Bookman, 2013. 576 p.

SILVA, E. C. *Pensamento computacional e a formação de conceitos matemáticos nos anos finais do Ensino Fundamental: uma possibilidade com kits de robótica*. 2018. 264f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/180525>. Acesso em: 4 set. 2020.

Na maioria dos casos, não existe um único algoritmo que resolva determinado problema; portanto, os estudantes poderão elaborar diferentes algoritmos que solucionem um problema proposto. Quando for requisitado aos estudantes que elaborem um algoritmo, sugerimos que, antes de expor uma solução ou indicar se os algoritmos elaborados por eles estão corretos ou não, peça que testem os algoritmos com diferentes entradas, de modo que eles possam verificar se os resultados obtidos

condizem com o que era esperado do algoritmo. Por meio desses testes, o estudante poderá ter a oportunidade de identificar eventuais falhas no algoritmo construído e a localização desses problemas, podendo, então, corrigir essas falhas. Cabe destacar que, nesse processo, além dos algoritmos, são trabalhados a decomposição e o reconhecimento de padrões, pilares do pensamento computacional.

No tópico “Formalizando a ideia de função”, os estudantes trabalharão com a definição de função como uma relação entre dois conjuntos tal que:

- todo elemento do primeiro conjunto tem um correspondente no segundo conjunto;
- cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento no segundo conjunto.

É importante que os estudantes compreendam o que significam essas duas afirmações. Por isso, caso necessário, retome os exemplos trabalhados anteriormente e peça a eles que justifiquem e argumentem por que as relações apresentadas são, de fato, funções.

No tópico “Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função”, destaque as diferenças entre contradomínio e conjunto imagem de uma função utilizando os exemplos dados. Também aproveite para retomar com os estudantes os significados e as diferenças entre as notações $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_+$, como indicado no boxe *Fique atento* (p. 19).

Relembramos o fato de esta parte do capítulo apresentar uma proposta de trabalho com a ideia de função que é próxima e complementar ao trabalho realizado no volume sobre funções exponenciais e funções logarítmicas desta coleção (de modo a permitir que os volumes possam ser utilizados sem uma ordem preestabelecida, deixando assim uma proposta flexível para você). Por isso, cabe destacar que o trabalho com essa primeira parte do capítulo pode ser adaptado, caso as aulas correspondentes ao volume mencionado já tenham sido realizadas. Nesse caso, uma possibilidade é utilizar essa parte deste capítulo como uma revisão dos conceitos abordados anteriormente, permitindo assim a ampliação do repertório dos estudantes e a consolidação das definições de função, caso eles tenham dificuldade com esses conceitos.

■ Atividades

As atividades deste capítulo e da coleção no geral contemplam diversos aspectos que favorecem o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica, bem como das competências específicas e das

habilidades de Matemática e suas Tecnologias e de outras áreas do conhecimento da etapa do Ensino Médio.

A atividade 1, que requisita ao estudante a escrita de um algoritmo correspondente a um processo dado, retoma os conhecimentos mobilizados no último exemplo do tópico, de modo a favorecer a habilidade EM13MAT315.

Na atividade 2, os estudantes retomam a analogia entre máquinas fabris e funções, inicialmente feita na primeira situação deste tópico, só que, desta vez, utilizando números reais como entrada e saída dessa máquina. Caso deseje, proponha aos estudantes que desenhem, nos próprios cadernos, máquinas semelhantes a essas e elaborem diferentes regras. Em seguida, eles podem trocar as “máquinas” com os colegas, que deverão identificar os valores de saída para diferentes valores de entrada.

Na atividade 3, apresentamos o trabalho com a habilidade EM13MAT506. Você pode pedir aos estudantes que elaborem no caderno outras tabelas análogas a essa, mas para outros polígonos regulares.

Nas atividades de 7 a 11, os estudantes resolverão problemas relacionados à determinação dos conjuntos domínio, contradomínio e imagens de funções, por meio de diagramas. Explore com os estudantes a diferença entre os conjuntos contradomínio e imagem, cujo processo de abstração pode oferecer a eles certa dificuldade.

► A função afim

Neste tópico, será desenvolvido um estudo exploratório sobre a função afim, aplicada em diferentes contextos, como na construção de funções para determinação da medida de temperatura, da posição de um corpo em um sistema ou da vazão. Destacamos neste tópico as diversas aplicações em problemas que envolvem as Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Ao longo do tópico, serão apresentados e formalizados os conceitos relativos à função afim, bem como a construção algébrica e geométrica, além dos aspectos relacionados a ela.

A situação 1 permite que seja desenvolvida com os estudantes uma investigação sobre vazão (medida de volume de um fluido por medida de intervalo de tempo) de uma piscina, durante o esvaziamento dela. Convém que você estimule nos estudantes a ideia, mesmo que ainda não formalizada matematicamente, de taxa de variação constante, representada pela vazão de água, já que a medida de volume de água que sai da piscina por unidade de medida de intervalo de tempo é um valor constante. Esta situação promove o desenvolvimento da habilidade EM13MAT101, no que tange ao uso da taxa de variação

na análise de uma situação das Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e da habilidade EM13MAT302, ao construir uma função afim para resolver um problema de vazão.

Nos itens **d** e **e** dessa situação e nas outras situações deste tópico, destacamos a importância de permitir aos estudantes que expressem a lei das funções da maneira que preferirem, seja algebricamente, seja de outro modo, como utilizando a linguagem corrente.

Na situação 2, a investigação proposta aos estudantes é uma aplicação que pode ser cotidiana para alguns deles: o valor pago por um prato em um restaurante do tipo *self-service*. Em serviços assim, a quantia paga por um cliente depende da medida de massa de comida colocada no prato. Nessa situação (e na maioria dos restaurantes do tipo *self-service*), essa quantia pode ser modelada por meio de uma função afim e, por isso, o trabalho com essa situação permite o desenvolvimento da habilidade EM13MAT302.

Na situação 3, a investigação proposta é um caso que envolve a velocidade de um veículo em um tipo de movimento conhecido nas Ciências da Natureza e suas Tecnologias como movimento uniformemente variado, no qual um corpo sofre variação na medida de velocidade devido à ação de uma aceleração com medida constante. Esse problema pode ser modelado por meio de uma função polinomial de 1ª grau, conhecida como função horária da velocidade. Esta situação permite o trabalho com a habilidade EM13MAT302. Além disso, nessa situação, você pode atuar em uma perspectiva interdisciplinar com o professor de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, em especial, o de formação disciplinar de Física, que pode trazer mais atividades desse tipo, comumente abordadas no Ensino Médio.

No tópico “Um pouco da história das funções afins”, antes da formalização dos conceitos matemáticos sobre as funções afins, você pode analisar com os estudantes um recorte histórico a respeito dos estudos de funções realizados por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1727), que desenvolveram o cálculo integral e diferencial, até os estudos mais recentes sobre a função afim, durante as décadas de 1960 e 1970, em especial os autores pertencentes ao grupo Bourbaki. O desenvolvimento dessa atividade de leitura favorece a habilidade EM13CHS101, no que tange ao processo de identificação de eventos históricos sobre as funções e a Matemática, além de contemplar a competência geral CG01, no processo de valorização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade.

No *Explore para descobrir* (p. 22), sugerimos que organize a turma em duplas, para que elas pensem e trabalhem em conjunto na resolução das atividades, favorecendo assim o diálogo entre os estudantes na busca por soluções. Depois de eles resolverem as atividades desse box, dedique um tempo para discutir por que, na atividade 1, não é possível identificar o valor fixo inicial nem o valor por quilômetro rodado cobrado no aplicativo. Peça a eles que apresentem diferentes pares de valores fixo e por quilômetro rodado que satisfaçam a condição dada no enunciado.

No tópico “Formalizando a definição de função afim”, após a apresentação do conceito de função afim e da lei dessa função, dê oportunidades aos estudantes de conversarem entre si e responderem às perguntas propostas no box *Refleta* (p. 23), em especial àquelas que tratam de por que as funções constantes nula e não nula receberam tal nomenclatura.

Neste tópico, também são apresentados dois exemplos com contextos das Ciências da Natureza e suas Tecnologias: a dilatação térmica de gases e o movimento uniforme. Ambos os contextos são retomados posteriormente em atividades, mas aproveite esse momento para verificar se os estudantes compreenderam as informações presentes no texto. A ilustração de um corredor mostrando que ele percorre 5 metros por segundo pode favorecer a compreensão do movimento uniforme, caso os estudantes tenham dificuldade em visualizá-lo.

No tópico “Função afim e graduações do termômetro”, o professor de formação disciplinar de Física pode auxiliar no planejamento e em algumas aulas, oferecendo oportunidades de aprofundamento de discussões sobre diferentes unidades de medida de temperatura e as possíveis conversões entre elas. Ele também pode associar o trabalho com funções afins ao tema de dilatações térmicas, que explica o funcionamento de termômetros de mercúrio e de álcool.

No mesmo tópico, o professor de formação disciplinar de Química pode promover uma discussão entre os estudantes sobre as razões que levaram à proibição da fabricação, importação e venda dos termômetros de mercúrio no Brasil. Sugerimos que essa discussão passe pelas diferentes formas que o mercúrio pode assumir, pelas aplicações populares do mercúrio até o século XXI (como nos termômetros, nas pilhas e baterias, nas lâmpadas fluorescentes e na produção de agrotóxicos) e pelos riscos à saúde que esse elemento químico pode causar.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Para saber mais informações sobre os tipos de mercúrio e seus usos, sugerimos o acesso à página do site do Ministério da Saúde que trata sobre esse elemento, disponível em: <https://www.saude.gov.br/vigilancia-em-saude/vigilancia-ambiental/vigipeq/contaminantes-quimicos/mercurio>. Acesso em: 2 set. 2020.

Após apresentar o tópico “Taxa de variação média da função afim”, caso deseje, retome as situações iniciais das páginas 20 e 21 e promova um aprendizado em equipe pedindo aos estudantes que, em grupos de quatro a cinco pessoas, identifiquem as taxas de variação das funções que modelam cada uma das três situações e associem-nas às grandezas dos enunciados (vazão, na situação 1; preço por medida de massa de comida, na situação 2; e medida de velocidade, na situação 3). Peça também às equipes que identifiquem em quais dessas situações as funções que as modelam são crescentes (situações 2 e 3) e em quais as funções são decrescentes (situação 1) e que justifiquem suas respostas, argumentando de acordo com os contextos.

Nesse trabalho em grupo, incentive os estudantes de um mesmo grupo a se auxiliarem, de modo que as dúvidas ou dificuldades de alguns membros sejam conversadas e trabalhadas com membros do mesmo grupo que apresentem mais facilidade com esses tópicos.

No tópico “Gráfico da função afim”, sugerimos que a introdução ao gráfico das funções afins seja feita em conjunto com o conteúdo das seções *Tecnologias digitais* (p. 32, 34 e 37) utilizando-se os *softwares* LibreOffice e GeoGebra.

Por fim, destacamos que, nesse tópico, a habilidade EM13MAT401 é favorecida no que tange à conversão de representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, e a habilidade EM13MAT501 é favorecida considerando a representação de números expressos em tabelas para apresentá-los no plano cartesiano e a identificação de quando essa representação pode ser modelada por uma função de 1º grau. A habilidade EM13MAT510 também é favorecida, considerando a utilização de retas como representação gráfica da relação entre conjuntos de dados.

■ Atividades

Com as atividades 12 a 22, você poderá oferecer aos estudantes oportunidades de desenvolver aplicações das funções afins em diferentes contextos. Em especial, nas atividades 21 e 22, é possível trabalhar o Tema Contemporâneo Transversal “Ciência e Tecnologia”, na exploração dos termômetros e do aumento de medida de tempera-

tura devido à transferência de calor.

O trabalho com esse conjunto de atividades permite desenvolver a habilidade EM13MAT302 na análise e construção de uma função polinomial de 1º grau em diferentes contextos. Já a habilidade EM13MAT314 é contemplada na atividade 21, na resolução de um problema que envolve uma grandeza (calor) cuja medida é dada pelo produto entre as medidas de outras grandezas (massa, calor específico e variação de temperatura).

Nas atividades de 23 a 39, os estudantes poderão resolver problemas que envolvem a taxa de variação média de uma função, explorando a concepção algébrica dessa taxa.

Cabe destacar também a atividade 33, no que tange à investigação e à análise de um problema por meio de um fluxograma, favorecendo a habilidade EM13MAT315.

Sugerimos que aproveite essas atividades para explorar com os estudantes o conceito de função afim e de taxa de variação em contextos das Ciências da Natureza e suas Tecnologias, como na atividade 25, no que tange ao movimento retilíneo uniforme; na atividade 31, na identificação da lei de uma função relacionada à dilatação linear sofrida por uma barra metálica; na atividade 34, na relação entre a medida de temperatura de ebulição da água e a medida de altitude; na atividade 36, na modelagem de uma função que representa uma expansão gasosa; e na atividade 37, na aplicação da segunda lei de Newton.

Aproveite as atividades 24, 26, 29, 33 e 38 para trabalhar com problemas relacionados à Matemática financeira que podem ser modelados por função afim, em especial no contexto de cálculo de lucro e de juros.

Nas atividades 40 a 49, os estudantes poderão desenvolver a habilidade EM13MAT302, na construção de modelos empregando funções afins, e a habilidade EM13MAT401, ao converter representações algébricas de funções afins em representações geométricas no plano cartesiano. Novamente, chamamos a atenção para o contexto no qual essas atividades estão situadas, relacionando linguagem matemática com conhecimentos físicos nas atividades 41, 44, e 47, resolvendo problemas sobre conversão entre unidades de medida de temperatura, análise de movimento de corpos em movimento uniforme, estudo de vazão de piscinas e cálculo de densidade de materiais. Cabe destacar também a atividade 48, na qual o trabalho contextualizado com o PIB permite trabalhar aspectos da habilidade EM13MAT104.

Nas atividades 50 a 54, são contempladas atividades que envolvem o estudo algébrico e geométrico das funções polinomiais de 1º grau, levando-se em consideração

o caso específico em que o valor inicial da função é nulo, o qual chamamos de função linear. Nesse conjunto de atividades, os estudantes devem interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza e suas Tecnologias que envolvam a variação de grandezas pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, favorecendo a habilidade EM13MAT101. Na atividade 52, os estudantes deverão interpretar um índice de natureza socioeconômica, o Ideb, investigando o processo de cálculo desse índice e produzindo argumentos que justifiquem por que esse cálculo é feito da maneira apresentada, favorecendo a habilidade EM13MAT104.

Nas atividades 54 a 60, são propostas questões que demandam a determinação das raízes de funções polinomiais de 1º grau e a elaboração e resolução de problemas que envolvam inequações de 1º grau, promovendo o desenvolvimento da habilidade EM13MAT302.

Por fim, caso queira complementar o trabalho com proporcionalidade e funções lineares, sugerimos que proponha aos estudantes a atividade 1 do tópico *Mais atividades* deste Manual, apresentado no final destas sugestões. Essa atividade trabalha a relação entre duas grandezas, velocidade e intervalo de tempo, que não são diretamente proporcionais, mas apresentam proporcionalidade inversa (que ocorre quando o produto da medida dessas grandezas é constante). Por isso, a representação gráfica dessa relação é formada por pontos que não são colineares, mas que pertencem a uma curva chamada hipérbole.

■ Seções

Como dissemos anteriormente, sugerimos o desenvolvimento das seções *Tecnologias digitais* (p. 32, 34 e 37) em conjunto com o processo de formalização do conteúdo do tópico “Gráfico da função afim”. Dessa forma, o estudante pode explorar a construção desses gráficos de maneira mais prática, utilizando-se de tecnologias digitais.

As atividades propostas nessas seções podem ser realizadas em uma perspectiva coletiva, organizando os estudantes em pequenos grupos. Procure utilizar o laboratório de informática da escola, se houver, e trabalhar em conjunto com docentes responsáveis por esse laboratório.

Tecnologias digitais (p. 32)

Nesta seção, os estudantes poderão construir os gráficos de funções afins utilizando o *software* livre LibreOffice. Nos passos indicados, é importante que os estudantes percebam o funcionamento do recurso

“Arrastar e soltar”. Caso necessário, explique a eles esse funcionamento: como a célula B2 contém a fórmula $=A2+3$, o valor dela será igual ao da soma do valor da célula A2 e do valor 3. Ao utilizar o “Arrastar e soltar”, deslizando a seleção até a célula B12, cada uma das células de B3 a B12 receberá uma fórmula análoga à da célula B2. Isto é, a célula B3 receberá a fórmula $=A3+3$, a célula B4 receberá a fórmula $=A4+3$, e assim por diante, até a célula B12, que receberá a fórmula $=A12+3$. Esse é um recurso útil e muito utilizado no trabalho com planilhas eletrônicas.

Peça aos estudantes que, em duplas, realizem as atividades 1 e 2 propostas nessa seção, de modo que cada estudante possa auxiliar o colega de dupla em eventuais dúvidas.

Tecnologias digitais (p. 34)

Esta seção permite que você trabalhe com os estudantes a utilização do GeoGebra, um *software* livre, na construção de gráficos de funções afins. Esse *software* é uma ferramenta digital gratuita que pode ser utilizada *on-line*, direto do navegador de internet. Na ausência de computadores, essa ferramenta pode ser acessada em *smartphones*.

Tecnologias digitais (p. 37)

Nesta seção, o *software* GeoGebra será utilizado novamente, desta vez, na análise e no estudo dos coeficientes da função afim. Esta atividade será desenvolvida em dois passos. Na primeira etapa, os estudantes devem construir o gráfico da função afim com coeficientes a e b , que são ajustados manualmente, de acordo com as recomendações contidas na atividade. No segundo passo, os parâmetros são modificados e, assim, os estudantes podem observar como os valores desses coeficientes determinam características do gráfico da função. Clicando no controle deslizante de a , eles podem variar o coeficiente angular da função afim, explorando assim as funções crescentes e decrescentes. Clicando no controle deslizante de b , eles podem variar o coeficiente linear dela, para analisar o ponto onde a reta que representa o gráfico da função afim intercepta o eixo y .

A realização das atividades propostas nessas três seções favorece as habilidades EM13MAT302 (na construção de um modelo empregando uma função polinomial de 1º grau por meio de uma tecnologia digital), EM13MAT401 (ao converter uma representação algébrica de uma função polinomial de 1º grau numa representação geométrica no plano cartesiano), EM13MAT501 (ao investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, para uma função polinomial de 1º grau), EM13MAT510 (ao utilizar

tecnologias digitais na investigação de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas) e EM13LGG701 (na exploração de tecnologias digitais da informação e comunicação (TDIC), compreendendo seus princípios e funcionalidades em diferentes contextos). Também favorece a habilidade CHS106, considerando a utilização de tecnologias digitais nas práticas escolares na produção de conhecimento.

Leitura e compreensão (p. 43)

Nesta seção, que trata da fotossíntese, o professor de formação disciplinar de Biologia pode ser convidado para apresentar ou retomar esse conceito, explicando o que é fotossíntese e a diferença entre esse processo e o de respiração.

Esta seção ajuda o estudante a compreender o processo pelo qual a luz proveniente do Sol é convertida em glicose, uma molécula associada à energia utilizada pelos seres vivos. Ao estudar fatores ótimos para produção de glicose pelas plantas, e também a influência humana em tais fatores, em particular como plantas auxiliam na diminuição do efeito estufa pela sintetização do CO_2 , os estudantes desenvolvem aspectos associados às habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias EM13CNT202 (ao analisar as diversas formas de manifestação da vida nos diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas) e EM13CNT203 (ao prever efeitos de intervenções nos ecossistemas e os impactos deles nos seres vivos e no corpo humano, de acordo com os mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia).

O trabalho com a unidade de medida de iluminância lux e seu múltiplo, kilolux, dentro do contexto de leitura e compreensão de um texto de divulgação científica sobre fotossíntese, favorece o trabalho com a habilidade EM13MAT103.

Já o estudo do processo de conversão de energia luminosa (radiação solar) em energia química (glicose), por meio de um fenômeno natural, e a reflexão socioambiental dos efeitos do CO_2 na atmosfera favorecem o desenvolvimento da CECNT02 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Esta seção ainda trata do Tema Contemporâneo Transversal “Educação Ambiental”.

Além disso, as atividades propostas para essa seção promovem o desenvolvimento da CG07, ao argumentar de acordo com dados e com informações confiáveis, para formular e defender ideias que respeitem e promovam a consciência socioambiental, com posicionamento ético em relação ao cuidado do planeta.



Luis War/Shutterstock

A produção de O_2 pela fotossíntese das plantas é parte do mecanismo que garante o equilíbrio entre CO_2 e O_2 na atmosfera, o que é fundamental para a manutenção da vida na Terra. Por isso, conscientize os estudantes da importância da manutenção das florestas e de áreas arborizadas e do combate ao desmatamento. Na foto, vista de região arborizada de Nova Lima (MG). Foto de 2020.

Além da sala de aula (p. 45)

Nesta seção, é abordada uma atividade investigativa em Etnomatemática que visa explorar a contextualização proposta por pesquisadores da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) no estudo da função afim a partir da construção das flautas usadas pelos Rikbaktsa.

Neste estudo, as flautas, que são utilizadas no cotidiano da comunidade, têm diferentes medidas de comprimento, conforme a medida de comprimento da mão do artesão responsável por fabricá-las. As flautas são construídas com diferentes medidas de comprimento para obter diferentes sons, já que, quanto maior a medida de comprimento da flauta, mais grave é o som emitido.

Nas atividades propostas nesta seção, as medidas de comprimento dessas flautas são modeladas por meio de uma função afim que associa a medida de comprimento em palmos de mão (unidade de medida de comprimento usada pelos Rikbaktsa) com a medida de comprimento aproximada em centímetros.

Na atividade 4, espera-se que o estudante identifique que a utilização de contextos do cotidiano auxilia o estudo de conceitos matemáticos, pois, além de permitir que conceitos matemáticos ganhem significados práticos, também ajuda a tornar o estudante sujeito participante do processo de construção dos significados. Além disso, esperamos que eles identifiquem que os significados práticos ganhos favorecem a utilização dos conceitos matemáticos no dia a dia.

Já na atividade 5, esperamos que o estudante indique diferentes contextos que possam ser modelados por uma função afim, em um processo semelhante àquele realizado pelos professores Rikbaktsa, como no preço de uma mercadoria vendida de acordo com a medida de massa; na medida de volume de produto de limpeza necessário para limpar uma superfície; no lucro de um estabelecimento com relação à quantidade de produtos vendidos; na quantidade de sacos de cimento para uma construção ou na quantidade de linha para produzir uma peça de roupa.

Essas atividades têm como objetivo estimular os estudantes em um processo de valorização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade, na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, favorecendo o trabalho com a CG01.

Além disso, esta seção promove o desenvolvimento das habilidades EM13MAT101 (na interpretação de uma situação social relativa às Ciências da Natureza e suas Tecnologias que envolve variação da grandeza comprimento) e EM13MAT302 (na construção de um modelo

empregando uma função polinomial de 1ª grau) e EM13MAT401 (ao converter uma representação algébrica de uma função polinomial de 1ª grau numa representação geométrica no plano cartesiano). Além disso, essa seção favorece os Temas Contemporâneos Transversais “Educação para Valorização do Multiculturalismo nas Matrizes Históricas e Culturais Brasileiras” e “Diversidade Cultural”.

Conexões (p. 54)

Nesta seção é abordado um texto de propósito interdisciplinar e um conjunto de atividades sobre o processo de conceptualização e construção do edifício Eastgate Centre, inspirado no processo de regulação de temperatura dos cupinzeiros.

A comparação do edifício Eastgate Centre com a estrutura de cupinzeiro real, explicando o funcionamento da eficiência térmica de ambos, contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13CNT102. O estudo tecnológico desse edifício, considerando o consumo reduzido de energia elétrica em uma região com características geográficas de clima quente, favorece o desenvolvimento da habilidade EM13CNT106.

Cabe destacar também que o trabalho com a capacidade térmica, que é dada pela razão entre a variação na quantidade de calor e a variação na medida de temperatura, permite favorecer o trabalho com as habilidades EM13MAT101 e EM13MAT314.

As atividades 1 e 2, em particular, ao indagar sobre o papel da capacidade térmica e calor específico de certos materiais na variação de temperatura deles, e a eficiência ambiental no processo produtivo que minimizem impactos socioambientais, desenvolvem a CECNT01 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Os Temas Contemporâneos Transversais “Educação Ambiental” e “Ciência e Tecnologia” são trabalhados nesta seção. O uso do conhecimento científico para explicar a estrutura térmica do cupinzeiro e a aplicação de um modelo semelhante para beneficiar a sociedade em um aspecto socioambiental, trazem para os estudantes reflexões que desenvolvem a CG01.

O trabalho com as atividades desta seção, em especial a atividade 4, oferece oportunidades de os estudantes produzirem textos argumentativos, utilizando dados de fontes confiáveis. O objetivo dessa argumentação é explicar o funcionamento de edifícios sustentáveis, promovendo a consciência socioambiental e o posicionamento ético em relação ao planeta, de modo a favorecer o desenvolvimento da CG07.

Após a realização das atividades de investigação 3 e 4, promova um debate depois das apresentações dos dados de cada grupo fazendo comparações e

verificando a opinião dos estudantes sobre os pontos positivos e negativos de cada caso. É importante observar que alguns pontos que podem tornar uma construção sustentável são a eficiência energética, ou seja, a garantia de que a fonte de energia elétrica é limpa e de baixo impacto ambiental, como a obtida com o uso de painéis fotovoltaicos e aquecedores solares; a gestão da água, com a implantação de sistemas de racionamento e reaproveitamento da água da chuva; o uso de materiais ecológicos; e o cuidado com a destinação de resíduos, como os restos dos materiais da obra, de maneira a causar menor impacto ao meio ambiente. A relação custo/benefício para a instalação e a manutenção dessas medidas deve ser analisada a longo prazo, considerando, por exemplo, a economia nos custos com energia elétrica.

D Funções definidas por mais de uma sentença

Nesse tópico, será desenvolvido um estudo exploratório sobre as funções definidas por mais de uma sentença, aplicadas em muitos casos em contextos científicos e tecnológicos. Em especial, serão explorados problemas que envolvem a determinação algébrica e geométrica desse tipo de função. Além disso, as funções modulares, que também são um tipo de função definida por mais de uma sentença, serão exploradas e formalizadas.

Com o trabalho com este tópico, será favorecida a habilidade EM13MAT404, ao analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. Além disso, os Temas Contemporâneos Transversais “Educação Financeira”, “Educação Fiscal” e “Educação Ambiental” serão contemplados nas situações de abertura, atividades e seções do tópico.

Na situação 1, desenvolva com os estudantes um estudo sobre um problema contextualizado: o cálculo de Imposto sobre a Renda da Pessoa Física (IRPF), também chamado de imposto de renda. Nesta situação, você poderá apresentar aos estudantes algumas informações sobre esse tipo de imposto, que pode ser desconhecido por parte deles, mas que pode estar presente no cotidiano de pais e familiares.

É importante destacar que o IRPF é um tipo de imposto, assim como o Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA), Imposto Predial e

Territorial Urbano (IPTU) ou o Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS), e todos eles podem ser calculados por meio de funções que relacionam diferentes variáveis.

O desenvolvimento da atividade proposta na situação abrange os Temas Contemporâneos Transversais “Educação Financeira” e “Educação Fiscal”, ao inteirar os estudantes em temáticas fundamentais para um processo de tomada de decisão consciente relacionada a finanças. Esta situação promove também o desenvolvimento da CG01, em um processo de valorização do conhecimento para entender, explicar e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Ao longo da situação 2, você apresentará e desenvolverá uma situação relativa à tarifa de consumo de água residencial na cidade Manaus. Nela, os estudantes podem compreender como é efetuado o cálculo da tarifa de água e como ele se relaciona às faixas de consumo, além de descrever duas funções que relacionam consumo de água a tarifa paga, para duas faixas de consumo diferentes.

Sugerimos que você incentive uma investigação a respeito das tarifas de água de sua região, procurando estabelecer uma comparação com os valores apresentados em Manaus. Para isso, procure investigar nas contas de água e esgoto o valor cobrado pela concessionária de sua cidade ou região para diferentes faixas de consumo (em m³). A realização dessa atividade de investigação abrange o Tema Contemporâneo Transversal “Educação Financeira”, podendo ser expandido para a “Educação Ambiental”, ao propor uma atividade de investigação sobre o consumo racional de água, dentro de uma proposta de mobilização dos estudantes em torno da escola e da comunidade.

Essa situação também promove o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404, ao analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (contas de água).

■ Atividades

Nas atividades 60 a 63, os estudantes devem resolver, em parceria com o professor, problemas que envolvem duas variáveis ou mais, de maneira algébrica ou gráfica. Na atividade 63, o Tema Contemporâneo Transversal “Educação Financeira” é contemplado, ao retomar a situação 2 apresentada na abertura deste tópico com outra tabela de tarifa de consumo de água.

Já nas atividades 64 a 68, os estudantes se deparam com problemas que envolvem funções definidas por mais de uma sentença e seus gráficos, aplicadas em diferentes contextos. Nas atividades 64, 66 e 67, são contemplados problemas aplicados em um contexto da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, no estudo de um gráfico

no plano cartesiano de medida de temperatura por medida de intervalo de tempo para análise de mudança de fase de uma substância, na construção de um gráfico no plano cartesiano que relaciona medida de temperatura e medida de intervalo de tempo e na interpretação de um gráfico no plano cartesiano que relaciona medida de intensidade sonora em decibéis e medida de intervalo de tempo.

Na atividade 68, em especial, o assunto da situação 1, IRPF, é retomado e aprofundado, com os estudantes construindo o gráfico no plano cartesiano da função que relaciona o salário de um contribuinte, em reais, ao valor pago de IRPF por ele, também em reais, e analisando características desse gráfico, como intervalos em que essa função é crescente.

Nessas atividades, a habilidade EM13MAT404 é contemplada, ao se calcular valores de uma função definida por partes ou encontrar a lei de uma função definida por mais de uma sentença representada graficamente no plano cartesiano.

Por fim, nas atividades 69 a 73, os estudantes trabalham com problemas relacionados à função modular, de maneira algébrica e geométrica no plano cartesiano. Nessas atividades, é fundamental desenvolver o conceito de módulo e sua representação gráfica no plano cartesiano. Estas atividades contemplam novamente a habilidade EM13MAT404, ao comparar e representar funções definidas por uma ou mais sentenças.

■ Seções

Tecnologias digitais (p. 63)

Nesta seção, desenvolva com os estudantes a construção de gráficos no plano cartesiano de funções definidas por mais de uma sentença, utilizando o *software* GeoGebra. Sugerimos o desenvolvimento desta seção em conjunto com o processo de formalização do conteúdo. Além disso, as atividades propostas nela podem ser realizadas numa perspectiva coletiva, organizando os estudantes em pequenos grupos.

A realização das atividades propostas nesta seção desenvolve as habilidades EM13MAT404 (ao analisar funções definidas por uma ou mais sentenças e suas representações algébrica e gráfica e convertendo essas representações de uma para outra com apoio de tecnologias digitais) e EM13LGG701 (na exploração de tecnologias digitais da informação e comunicação (TDIC), compreendendo seus princípios e funcionalidades em diferentes contextos). Também favorece a habilidade CHS106, considerando a utilização de tecnologias digitais nas práticas escolares na produção de conhecimento.

Além da sala de aula (p. 65)

Nesta seção, é abordada uma atividade investigativa com ênfase no pensamento computacional, ao investigar a utilização do comando **Se** no *software* GeoGebra.

As atividades a serem desenvolvidas nessa seção contemplam a habilidade EM13MAT315, ao investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. Além disso, a habilidade EM13MAT404 é desenvolvida ao analisar funções definidas por uma ou mais sentenças e suas representações algébrica e gráfica.

Destacamos também que o trabalho com algoritmos e fluxogramas desenvolvido nesta seção busca favorecer nos estudantes o pilar de algoritmo do pensamento computacional. Por isso, sugerimos que você aproveite essa seção para acompanhar os estudantes durante o trabalho com ela, de modo a identificar como eles lidam com esse pilar, sanando eventuais dúvidas e favorecendo um ambiente de aprendizado nesse pilar.

► Vestibulares e Enem

O trabalho com as atividades 1 a 16 contempla várias habilidades: EM13MAT302, na construção de modelos, empregando as funções polinomiais de 1ª grau, e EM13MAT404, ao analisar funções definidas por uma ou mais sentenças, em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra.

Chamamos a atenção para as atividades 3, 9 e 13, em um contexto científico da área das Ciências da Natureza e suas Tecnologias, aplicadas no estudo da medida de temperatura de um paciente em estado febril, na transmissão de uma doença viral e infecciosa (raiva) e na análise de vazão de reservatórios. Destacamos também a aplicação das funções polinomiais de 1ª grau em contextos da Matemática financeira nas atividades 14 e 16, que envolvem problemas com cálculo salarial e lucro.

Destacamos também a atividade 11, que favorece a habilidade EM13MAT103, devido ao trabalho com conversão de unidades de medida relacionadas a armazenamento e transferência de dados.

► Mais atividades

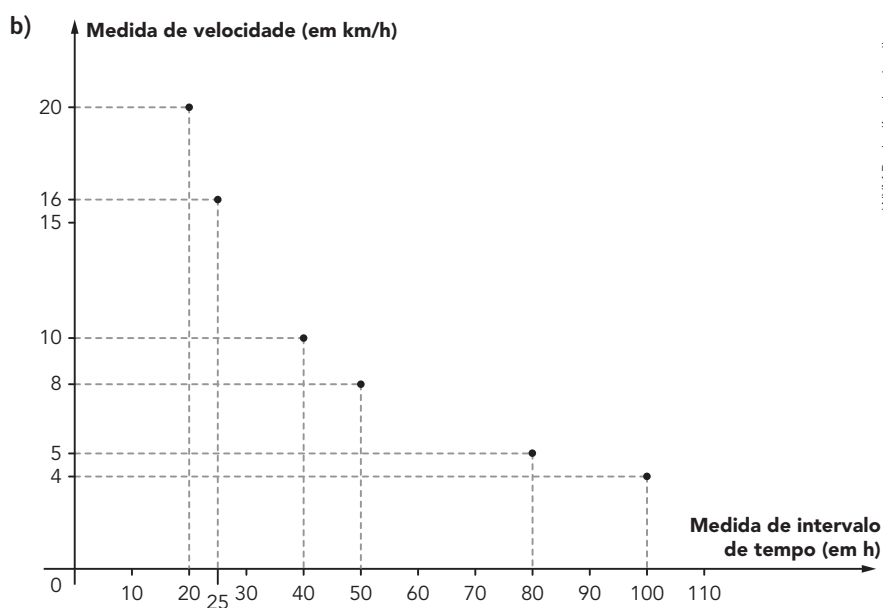
1. A medida de distância entre São Carlos (SP) e Uberlândia (MG) é de aproximadamente 400 km. A medida de intervalo de tempo gasto para um veículo percorrer essa medida de distância depende da medida de velocidade média.

- a) Elabore no caderno um quadro com pelo menos 3 pares de valores para medida de velocidade (km/h) e medida de intervalo de tempo (h).
- b) No caderno, represente esses pontos em um plano cartesiano. Existe uma reta que passe por todos esses pontos?
- c) Nessa situação, a medida de velocidade e a medida de intervalo de tempo são diretamente proporcionais? Justifique.

Resolução:

- a) Exemplo de resposta:

Medida de velocidade (em km/h)	Medida de intervalo de tempo (em h)
50	8
100	4
80	5
25	16
40	10
20	20



WYV Design/Arquivo da editora

Não existe uma reta que passa por todos esses pontos.

- c) Não, pois os pontos não são colineares.

Capítulo 2

Função quadrática

Lançamentos oblíquos, como os de um projétil ou de bolas atiradas a uma cesta de basquete, ou a resolução de determinados problemas de lucro, podem ser estudados por meio de funções quadráticas.

O estudo das funções quadráticas é o primeiro momento em que o estudante vai entrar em contato com outro tipo de relação. É o primeiro passo para perceber que existem outras possibilidades. A taxa de variação deixa de ser constante. A função não será mais simplesmente crescente ou decrescente, será importante distinguir como ela se comporta em cada maneira.

O capítulo é dividido em três partes, nas quais tivemos a preocupação de conduzir atividades investigativas sobre a função quadrática em diferentes contextos das Ciências da Natureza e suas Tecnologias, em uma perspectiva interdisciplinar. Na primeira parte, o estudante deve desenvolver um estudo sobre a ideia de função quadrática, trabalhando com a lei dessa função e seus coeficientes. Na segunda parte, são apresentados aos estudantes os zeros da função quadrática, por meio de fórmulas ou pelo método de completar quadrado, explorando também as construções gráficas por meio do *software* livre GeoGebra. Por fim, na terceira parte, é proposta a análise algébrica e gráfica da função quadrática, explorando as raízes, concavidade, termo independente e ponto de máximo e de mínimo. É importante que não fiquemos aqui restritos às demonstrações dedutivas, mas, sim, que exploremos as atividades empíricas, relacionando-as com as competências e habilidades.

Objetivos

- Investigar diferentes situações reais que podem ser modeladas por funções quadráticas.
- Construir modelos utilizando funções quadráticas para resolver problemas em diferentes contextos.
- Explorar a ideia de função quadrática e algumas propriedades dela.
- Conhecer como o estudo de funções quadráticas se iniciou por meio da história da Matemática.
- Utilizar tecnologias digitais para explorar e analisar os zeros de funções quadráticas.
- Utilizar o conceito de raízes de equações de 2º grau para construir modelos e resolver problemas.
- Construir um fluxograma para modelar uma situação e indicar a solução para o problema.
- Investigar diferentes situações reais analisando gráficos de funções quadráticas no plano cartesiano.
- Explorar a parábola e as propriedades geométricas dela.
- Construir, explorar e analisar o gráfico de funções quadráticas no plano cartesiano, utilizando ou não tecnologias digitais.
- Explorar a relação entre parábolas e catenárias no contexto artístico.
- Converter representações algébricas de funções quadráticas em representações gráficas e vice-versa.
- Analisar funções quadráticas em que uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra.

- Investigar os coeficientes a , b e c e o discriminante Δ .
- Compreender o que é vértice da parábola e investigar ponto de máximo ou de mínimo de funções quadráticas.

Justificativa

O trabalho com funções quadráticas e com a análise de problemas utilizando técnicas associadas a essas funções é parte de um conjunto de habilidades necessárias para permitir aos estudantes modelar situações em diversos contextos, como os das Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Matemática financeira.

No entanto, quando comparadas às funções afins, as funções quadráticas apresentam maior complexidade no comportamento dos gráficos e em outras características. Por isso, o estudo das funções quadráticas necessita passar por outras questões de maior complexidade, como a identificação de pontos de máximo e mínimo e de intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.

Ao mesmo tempo, essa maior complexidade amplia os contextos que os estudantes podem modelar com os próprios conhecimentos matemáticos. Portanto, o estudo das funções quadráticas se justifica nesse aumento de repertório, favorecendo que o estudante tenha mais recursos para analisar a realidade ao seu redor e tomar decisões conscientes.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas

Neste tópico, apresentaremos mais sugestões de abordagens, específicas para o capítulo, pensando nas propostas pedagógicas que motivaram a elaboração dos conteúdos, das atividades e das seções do capítulo.

AValiação da Aprendizagem

Seguindo a proposta de concepção de avaliação desta coleção, focada em uma avaliação formativa e continuada, destacamos a importância de organizar, previamente, momentos avaliativos ao longo do trabalho com este capítulo, de modo que esses momentos, junto às avaliações continuadas, contemplem múltiplos aspectos do processo de avaliação.

Nessa linha, podemos tomar como exemplo o tópico “Zeros de uma função quadrática”. Ao longo do trabalho com esse tópico, requisite aos estudantes que se autoavaliem em relação às próprias capacidades de identificar os coeficientes das funções quadráticas. Essa habilidade é de fundamental importância no trabalho com o tópico “Análise algébrica e gráfica da função quadrática”, pois esses coeficientes são usados para analisar o comportamento do gráfico das funções quadráticas no plano cartesiano, inclusive na identificação dos pontos de máximo e de mínimo.

Ao realizar esse processo de avaliação qualitativa sistemática, você poderá realizar adaptações nos percursos e metodologias utilizados na aula, de modo a possibilitar um melhor aprendizado aos estudantes.

É interessante destacar também a importância do trabalho com questões de exames de larga escala, que podem ser oportunidades de mobilização, por parte dos estudantes, de diversos conteúdos estudados neste capítulo. Sugerimos então que avalie a possibilidade de requisitar algumas das atividades da seção *Vestibulares e Enem* ao longo do trabalho com os tópicos. Por exemplo, durante o trabalho com o tópico “Análise algébrica e gráfica da função quadrática”, considere requisitar aos estudantes a resolução das atividades 2, 4 e 10 dessa seção. Em especial, a atividade 4 favorece também a habilidade EM13MAT503.

Disponibilizamos também, com foco na complementação do trabalho com funções quadráticas, duas atividades no tópico *Mais atividades* deste Manual.

Abertura

A situação de abertura deste capítulo visa instigar os estudantes em um processo de investigação associado ao Tema Contemporâneo Transversal “Ciência e Tecnologia” aplicado em um contexto esportivo, que é modelado por uma função quadrática. As atividades propostas na abertura propiciam que você e os estudantes explorem uma função polinomial de 2º grau, determinando certos pontos do gráfico dela. Ao final, o estudante deverá ser capaz de interpretar os resultados algébricos e geométricos desenvolvidos na atividade de investigação.

No processo de investigação da situação proposta na abertura, discuta com os estudantes os aspectos científicos envolvidos na construção do robô CUE3, desenvolvendo assim a CG01, em um processo de valorização do conhecimento científico para compreender e explicar a realidade.

A ideia de função quadrática

Nesse tópico, será desenvolvido um estudo exploratório com os estudantes sobre a determinação da lei de uma função quadrática, bem como as características que ela apresenta, relacionando-a em diferentes contextos matemáticos e científicos. A habilidade EM13MAT302 será trabalhada ao longo de todo o tópico, no processo de construir modelos matemáticos empregando funções polinomiais de 2º grau na resolução de problemas. A seção *Leitura e compreensão* deste tópico amplia a visão do estudante ao desenvolver um estudo sobre o efeito Joule e a modelagem de um problema com churrasqueiras elétricas, cuja lei que determina a potência deste equipamento eletrônico é dada por uma função quadrática.

Na situação 1, conduza os estudantes em uma atividade investigativa a respeito do preço de venda de bolos por uma doceria, em função do desconto ofertado pelo comerciante. Destaquemos nessa situação as relações entre preço de venda, desconto, quantidade de bolos vendidos e a determinação do valor pelo qual um bolo é vendido de modo que esta doceria tenha maior lucro.

Essa situação contempla uma problemática recorrente no cotidiano de comerciantes e empresários, que precisam buscar sempre um equilíbrio entre valores de venda e custo, a fim de obter bons lucros e altas vendas, que são a base de um negócio. Esta situação contempla a habilidade EM13MAT302, ao construir um modelo empregando uma função polinomial de 2º grau na resolução de um problema matemático.

Na situação 2, é proposta uma atividade em que você deve conduzir os estudantes em uma investigação que associe conhecimentos algébricos e geométricos na escolha da forma e das medidas de comprimento das dimensões de um cercado para cavalos, seguindo a condição de que a medida de comprimento do perímetro seja igual a 200 metros, a fim de obter a maior medida de área possível. Essa atividade permite aos estudantes, por meio de estudo quantitativo, identificar que, dada uma medida de comprimento de perímetro constante, a região retangular com maior medida de área que pode ser obtida é o quadrado.

Essa situação desenvolve a habilidade EM13MAT302, na construção de um modelo matemático que relacione medida de comprimento do perímetro e medida de área de uma região por meio de uma função polinomial de 2º grau.

Na situação 3, apresente aos estudantes um problema real, que pode ser modelado por uma função quadrática. Apresentamos uma investigação sobre a quantidade de combustível vendida por um posto de gasolina em função do aumento, em centavos de Real, em cima do preço do litro de gasolina. É importante destacar nessa situação que, por meio de uma modelagem matemática, será possível fazer uma previsão do valor total recebido com as vendas por dia nesse posto em função do aumento, em centavos de Real, aplicado no valor do litro de gasolina. Essa situação contempla a habilidade EM13MAT302, na construção de um modelo por meio de uma função polinomial de 2º grau.

Atividades

As atividades relacionadas a esse tópico contemplam diversos aspectos que favorecem o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica, bem como das competências específicas e das habilidades de Matemática e suas Tecnologias e de outras áreas do conhecimento.

A habilidade EM13MAT302 é desenvolvida nas atividades de 1 a 9, na identificação de funções quadráticas e seus coeficientes, assim como no cálculo dos valores numéricos de cada função e na construção de modelos matemáticos utilizando essas funções.

Nas atividades de 1 a 4, os estudantes devem resolver problemas que envolvem a classificação de funções como quadrática, quando possível, segundo a definição formal, e a identificação dos coeficientes de funções quadráticas. Nas atividades de 5 a 9, os estudantes resolvem problemas relacionados ao cálculo do valor numérico de funções quadráticas, assim como a modelagem de problemas por meio das funções quadráticas.

Destacamos, em especial, as atividades 7 e 9, devido ao trabalho com funções quadráticas utilizando algoritmos, nas quais os estudantes devem investigar esses algoritmos para resolver problemas e para identificar as funções associadas a eles. Desse modo, essas atividades favorecem o trabalho com a habilidade EM13MAT315.

■ Seções

Leitura e compreensão (p. 83)

Nessa seção, apresente aos estudantes um texto interdisciplinar que abordará o funcionamento das churrasqueiras elétricas, em uma perspectiva interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, em especial a Física, desenvolvendo assim o Tema Contemporâneo Transversal “Ciência e Tecnologia”.

O funcionamento das churrasqueiras é dado por meio de um fenômeno físico chamado efeito Joule, que consiste na liberação de energia na forma de calor por um resistor devido à passagem de uma corrente elétrica por ele. O funcionamento das churrasqueiras se assemelha ao funcionamento das duchas de banho, cujo aquecimento da água ocorre por meio do mesmo fenômeno físico. A potência desses equipamentos, em watts, é dada para um resistor de resistência R , em ohm e tensão elétrica U , em volt, pela lei $P = \frac{U^2}{R}$. Por isso, mantendo a resistência constante, a função que associa P a U é uma função quadrática.

Nas atividades desta seção, são desenvolvidas as habilidades EM13MAT101 (ao interpretar criticamente situações de Ciências da Natureza que envolvam a relação entre grandezas) e EM13MAT302 (ao modelar um problema por meio de uma função polinomial de 2º grau). Além disso, habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias são contempladas nesta seção, sendo elas EM13CNT107 (na análise dos processos de transformação e condução de energia envolvidos), EM13CNT302 (interpretando textos e equações de modo a participar de discussões em torno de

temas tecnológicos) e EM13CNT308 (ao investigar e analisar o funcionamento de equipamentos elétricos para compreender as tecnologias contemporâneas). Esta seção também desenvolve CG01 no processo de valorização do conhecimento científico e a CECNT01, no que tange à análise de processos tecnológicos de acordo com as relações entre matéria e energia.

Por fim, destacamos que, em conjunto com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, em especial o de formação disciplinar de Física, o trabalho com esta seção pode ser ampliado com a exploração de outros eletrodomésticos que fazem uso de resistências para o funcionamento e a discussão de em quais deles o aquecimento devido ao efeito Joule é desejado, como no caso dos chuveiros elétricos.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Mais informações e um experimento sobre o efeito Joule podem ser encontrados no vídeo:

Tema 09 – Corrente Elétrica e Lei de Ohm | Experimentos – Efeito Joule. Disponível em: <https://youtu.be/volcxwNj7qs>. Acesso em: 7 set. 2020.

► Zeros da função quadrática

Neste tópico, será desenvolvido um estudo exploratório, em diferentes contextos, sobre os zeros da função quadrática, que estão relacionados às raízes da equação quadrática correspondente. Tal estudo será realizado utilizando métodos algébricos com ou sem apoio das tecnologias, sendo esses métodos a fórmula do discriminante e o completamento de quadrados. A habilidade EM13MAT302 será favorecida ao longo de todo o tópico, no processo de modelagem por meio de funções polinomiais de 2º grau.

Na situação 1, você deve incentivar os estudantes a investigar a medida de área de um terreno retangular em função das medidas de comprimento das dimensões dele. O objetivo dessa situação consiste na construção de uma função que represente a medida de área desse terreno em termos de um valor genérico de medida de comprimento de lado x , e na sequência, a determinação desse valor x para que o terreno apresente uma medida de área igual a 288 m². A realização da atividade proposta nessa situação favorece a habilidade EM13MAT302 ao modelar e resolver um problema utilizando-se de uma função quadrática.

Na situação 2, de maneira muito semelhante ao processo que foi realizado na situação 1, os estudantes devem investigar uma situação que relaciona a medida de área de uma região retangular em função das medidas de comprimento dos lados dessa região retangular. Nessa situação, o problema apresentado consiste na pintura de um muro, levando-se em consideração a medida de volume de tinta em uma lata e a medida de área que ela consegue cobrir com uma

demão de tinta. Na atividade a ser desenvolvida, os estudantes devem encontrar uma expressão matemática que relaciona as medidas de comprimento das dimensões da parede que será pintada e a medida de área da região pintada. Tal problema será modelado por uma função polinomial de 2º grau, contemplando assim a habilidade EM13MAT302.

Na situação 3, apresente uma investigação cujo problema é modelado por uma função quadrática e consiste na análise do valor pago por um consumidor, ao comprar produtos de um brechó que oferece uma condição especial de desconto por cada peça de roupa comprada. Nessa situação, o objetivo do estudante, em parceria com você, é encontrar a expressão algébrica que representa o valor pago, e a condição na qual o valor pago pelas peças não gera lucro ao brechó. Este problema trata de uma situação na qual o estudante deve encontrar o zero da função. A habilidade EM13MAT302 é desenvolvida na realização das atividades desta situação.

Por fim, na situação 4, você deve novamente conduzir os estudantes em uma atividade investigativa que envolve a determinação da expressão da medida de área de uma região, agora de uma janela que deve ser preenchida com uma tela de proteção, em função das medidas de comprimento dos lados dela. A realização das atividades dessa situação favorece o desenvolvimento da habilidade EM13MAT302 novamente.

No tópico “Explorando as raízes de uma equação de 2º grau”, são apresentadas informações sobre as técnicas matemáticas usadas pelos antigos babilônios e, na atividade 10 deste capítulo, os estudantes são convidados a seguir um processo de resolução de um problema que recai em uma equação de 2º grau, utilizando um algoritmo adaptado do processo feito pelos babilônios. O professor de formação disciplinar de História pode participar do trabalho com esta parte do tópico apresentando mais detalhes sobre essa civilização.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Caso queira ampliar o trabalho sobre a Matemática dos babilônios e o método deles para resolver problemas equivalentes a equações de 2º grau, sugerimos a leitura do capítulo 1 – Matemáticas na Mesopotâmia e no Egito – do livro *História da Matemática*, da professora do Instituto de Matemática da UFRJ Tatiana Roque.

Além de ser o primeiro livro de história geral da Matemática escrito no Brasil, essa obra também apresenta uma abordagem historiográfica atualizada, com especial atenção a críticas a lugares-comuns nessa área.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

No *Explore para descobrir* (p. 88) sugerimos que organize os estudantes em duplas, para que possam conversar sobre cada passo proposto. O objetivo dessa exploração

é que eles possam desenvolver a fórmula para calcular as raízes de uma equação de 2º grau; dessa maneira, é possível perceber que essa fórmula é o resultado de manipulações algébricas na equação de 2º grau.

Em alguns passos, os estudantes precisam utilizar técnicas que aprenderam no Ensino Fundamental, como a utilização do mínimo múltiplo comum (mmc), para obter um denominador comum e possibilitar a adição de frações, e a fatoração pelo caso do trinômio do quadrado perfeito. Se julgar necessário, retome esses conteúdos com a turma, para que os estudantes consigam realizar os passos corretamente.

Depois de obter a fórmula, proponha aos estudantes que façam um teste com uma equação de 2º grau cujas raízes eles já conheçam, para que eles verifiquem que a fórmula funciona e está correta.

■ Atividades

A habilidade EM13MAT302 é desenvolvida nas atividades de 11 a 26, na modelagem de problemas por meio de funções quadráticas, assim como na determinação de raízes destas funções, por meio de fórmula ou completando quadrados.

Na atividade 15, a habilidade EM13MAT315 é favorecida, ao investigar e registrar, por meio de um fluxograma, os passos para a determinação do número de zeros reais de uma função quadrática, de acordo com os valores dos coeficientes da lei dessa função.

Nas atividades 17 e 18, os estudantes devem determinar os zeros de funções quadráticas completando quadrados. O completamento de quadrados é importante para resolver as atividades 20 e 21, nas quais se buscam os pontos de máximo e de mínimo de funções quadráticas.

Na atividade 22, o Tema Contemporâneo Transversal “Educação Financeira” é contemplado ao resolver um problema que envolve lucro, que é determinado pela diferença entre receita e despesa em uma empresa. A resolução desta atividade propicia ao estudante uma aplicação de função quadrática na área de finanças.

As atividades 23 e 24 procuram estabelecer uma aplicação da função quadrática em um contexto interdisciplinar com a área das Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ao estabelecer uma relação entre a função horária do espaço no movimento uniformemente variado e as funções quadráticas.

Caso deseje complementar as atividades propostas para este tópico, sugerimos que peça aos estudantes que resolvam a atividade 1 do tópico *Mais atividades* deste Manual. Ela trabalha não só com zeros de equações polinomiais de 2º grau, mas também com o teorema de Pitágoras para triângulos retângulos e um pouco de história da Matemática.

■ Seções

Tecnologias digitais (p. 87)

Nesta seção, você poderá conduzir os estudantes em um estudo sobre o cálculo das raízes de uma equação de 2º grau, utilizando como ferramenta digital o *software* livre GeoGebra. Esse *software* é uma ferramenta digital gratuita, cuja operação dá-se de maneira eficaz em computadores e *smartphones*. Procure utilizar o laboratório de informática da escola, se houver, ou trabalhar em conjunto com o docente responsável por esse laboratório.

A atividade desta seção investigativa é realizada em três passos, os quais devem ser seguidos para melhor compreensão da investigação proposta. O primeiro passo consiste em uma familiarização do estudante com as ferramentas disponíveis no GeoGebra, assim, é sugerido que você as apresente, destacando a janela “Calculadora CAS” em “Apps”. No segundo passo, o estudante deve, por meio de um comando computacional (descrito na atividade da seção), inserir a equação a ser analisada. No terceiro passo, por meio do comando **Soluções(eq1)**, o *software* apresentará as duas soluções possíveis, que geralmente são chamadas de x' e x'' ou de x_1 e x_2 . Sugerimos que, sempre que possível, apresente a seção antes da formalização do conteúdo, para que o estudante possa explorar a construção das raízes de uma equação quadrática utilizando tecnologias digitais.

Tecnologias digitais p. 95

Nesta seção, novamente os estudantes devem trabalhar em uma abordagem utilizando-se do GeoGebra, desta vez, analisando o papel dos coeficientes de uma equação de 2º grau. A atividade será desenvolvida em três passos.

No primeiro passo, os estudantes devem utilizar-se da ferramenta controle deslizante, que permite variar o coeficiente a da equação de 2º grau. O mesmo procedimento deve ser realizado com os coeficientes b e c . No segundo passo, na opção Álgebra, os estudantes devem entrar com os termos associados às raízes de uma equação de 2º grau. Essas fórmulas apresentam as raízes da equação de acordo com os coeficientes a , b e c . Por fim, no terceiro passo, com valores estabelecidos para os controles deslizantes, os estudantes manipulam as raízes da equação.

A realização das atividades propostas nessas seções *Tecnologias digitais* desenvolvem a habilidade EM13MAT302 (na construção de um modelo empregando uma equação de 2º grau por meio de uma tecnologia digital). A habilidade EM13LGG701 é desenvolvida na exploração de tecnologias digitais da informação e comunicação.

► Análise algébrica e gráfica da função quadrática

Neste tópico é desenvolvido um estudo exploratório sobre a função quadrática aplicada em diferentes contextos científicos, na análise algébrica e gráfica da função.

Desenvolveremos ao longo do tópico a habilidade EM13MAT101, ao interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza e suas Tecnologias que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas; a habilidade EM13MAT402, ao converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano; a habilidade EM13MAT503 na identificação de pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em diversos contextos científicos; e a habilidade EM13MAT506, ao representar graficamente a variação da medida de área e da medida de comprimento do perímetro de um polígono regular quando as medidas de comprimento dos lados dele variam. Além disso, é desenvolvida a CG02 na valorização do exercício da curiosidade intelectual, recorrendo a uma abordagem reflexiva e científica.

Na situação 1, é apresentada ao estudante uma atividade investigativa em uma perspectiva interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza, ao modelar uma situação da natureza que envolve o salto da espécie *Acris gryllus*, uma espécie de perereca que tem a capacidade de saltar a uma medida de distância equivalente a 40 vezes a medida de comprimento da própria altura. A trajetória desenvolvida por esse anfíbio se assemelha a um arco de parábola, cujo modelo matemático é uma função quadrática. O objetivo dessa situação é propor ao estudante uma visão ampla sobre o mundo e a natureza, conectando-o com os conhecimentos matemáticos.

Na situação 2, os estudantes desenvolvem uma atividade investigativa, com foco no movimento parabólico descrito por um salto *grand jeté* por bailarinos clássicos. Assim como na situação anterior, esse salto também pode ser modelado pelo gráfico no plano cartesiano de uma função quadrática. É importante destacar que essa situação serve como um primeiro contato com o estudo sobre pontos de máximo e de mínimo de uma função quadrática, abordando, em um primeiro momento, a ideia por trás destes conceitos, antes da formalização matemática deles.

Nessa situação, o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias, em especial o de formação disciplinar

de Arte, pode participar da aula com uma discussão sobre o balé e apresentação de vídeos com alguns dos passos e técnicas desse estilo de dança, em especial, o *grand jeté*, de modo que os estudantes possam visualizar melhor o arco formado nesse salto.

No *Explore para descobrir* (p. 99) distribua aos estudantes uma folha de papel-manteiga, papel vegetal ou qualquer outra folha que seja menos opaca. O objetivo é que eles construam a parábola partindo da definição dela como lugar geométrico. Ao longo da atividade, resalte que, quanto mais dobras eles fizerem, mais definida ficará a curva. Uma atividade similar a esta também pode ser realizada no *software* GeoGebra Geometria, utilizando a ferramenta “Exibir rastro”. Essa ferramenta mostra o rastro de um objeto quando ele é movimentado na tela.

Destacamos também o trabalho neste tópico com a habilidade EM13MAT502 na identificação de padrões e criação de conjecturas relacionadas às investigações de relações entre valores numéricos, inclusive na identificação dos casos em que essa relação se dá por uma lei da forma $y = ax^2$, como no tópico “Construção do gráfico de uma função quadrática”.

■ Atividades

Nas atividades 27 a 31, é favorecido o trabalho com a habilidade EM13MAT402 na conversão de representações algébricas de funções quadráticas em representações geométricas no plano cartesiano. Em especial, a 27 favorece essa habilidade também na identificação dos casos em que uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra. Também é favorecido o trabalho com a EM13MAT502, no que tange ao reconhecimento de quando as funções são da forma $y = ax^2$.

Nas atividades 32 a 41, a habilidade EM13MAT402 é favorecida ao analisar se determinados pontos pertencem ou não pertencem a determinada função e na análise da relação entre os coeficientes da função quadrática e aspectos do gráfico dessa função.

As atividades 39, 40 e 41 contemplam a habilidade EM13MAT506, ao representar graficamente a variação da medida de área e da medida de comprimento do perímetro de um polígono regular quando as medidas de comprimento dos lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Ao realizar as atividades 42 a 44, os estudantes trabalham problemas matemáticos associados à determinação dos pontos de máximo e de mínimo de uma função quadrática. É fundamental nesse momento reforçar com os estudantes o conceito de simetria, presente nas

parábolas, relacionando o eixo de simetria com o vértice e com o ponto de máximo ou de mínimo. A realização destas atividades contempla a habilidade EM13MAT402, no estudo gráfico das propriedades das funções quadráticas.

Nas atividades 47 e 48, continue o processo de conduzir com os estudantes uma análise geométrica sobre o eixo de simetria das funções quadráticas, indicando o eixo da parábola e o ponto de máximo ou de mínimo das funções.

Nas atividades 49 a 64, são contempladas atividades que envolvem a habilidade EM13MAT101, ao interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza e suas Tecnologias que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas; e a habilidade EM13MAT402, ao converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano; a habilidade EM13MAT503, na identificação de pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em diversos contextos científicos.

Caso queira complementar o trabalho com pontos de máximo e de mínimo em funções quadráticas, sugerimos que proponha aos estudantes a atividade 2 do tópico *Mais atividades* deste Manual, que trata de um contexto de Matemática financeira e identificação de critérios para obtenção de lucro máximo em uma companhia aérea. Essa é uma atividade do vestibular da Universidade Federal de Pernambuco.

■ Seções

Tecnologias digitais **p. 101**

Nesta seção, conduza os estudantes em uma atividade investigativa com uso de tecnologias digitais a respeito da construção de gráficos de funções quadráticas no plano cartesiano. Para isso, os estudantes devem utilizar novamente o *software* livre GeoGebra.

A realização desta atividade contemplará cinco passos, que devem ser seguidos pelos estudantes. No primeiro passo, converse com eles sobre a notação utilizada no GeoGebra para inserir expressões algébricas, como o uso do caractere “^” para indicar potências. No segundo passo, o estudante deve acessar as configurações de exibição (na parte superior direita da tela) e selecionar as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal, para melhor visualização. No terceiro passo, são determinadas as raízes da função, por meio do comando **raiz[f]**. No quarto passo, é determinado o ponto em que o gráfico intersecta o eixo das

ordenadas. Para isso, os estudantes devem digitar o comando na **intersecção[f, x=0]**. Nesse passo, converse com eles e peça que tentem inferir por que é inserido o termo **x=0** nesse comando. É esperado que eles deduzam que o comando encontra as intersecções entre o gráfico da função f no plano cartesiano e da reta dada pela equação $x = 0$, reta essa que corresponde ao eixo das ordenadas. Por fim, no quinto passo, determine com os estudantes o extremo dessa função, que corresponde ao vértice da parábola, ponto esse onde o gráfico muda de sentido.

Depois de seguir esses passos, os estudantes podem repetir esses procedimentos na atividade 3 desta seção.

Na segunda parte desta seção, o GeoGebra é utilizado em uma atividade investigativa a respeito da influência dos coeficientes da função quadrática do discriminante Δ no gráfico da função. Esse procedimento é desenvolvido em seis passos, que serão comentados a seguir.

No primeiro passo, os estudantes devem repetir os procedimentos anteriores para que os eixos e a malha apareçam na tela. Com o comando **a=1**, deve aparecer na tela um controle deslizante com valores entre -5 e 5 , que permite ajustar os valores do coeficiente a . O mesmo deve ser realizado para os coeficientes b e c .

No segundo passo, os estudantes devem inserir a lei da função. O terceiro passo consiste em uma adequação da parábola para melhor visualização. No quarto passo, por meio da variação dos coeficientes a , b e c , os estudantes devem observar as modificações que ocorrem no gráfico da função quadrática no plano cartesiano. Destaquemos aqui a relação entre a concavidade da parábola e o coeficiente a : quando $a > 0$, a concavidade fica para cima; quando $a < 0$ a concavidade fica para baixo. Essa relação entre concavidade do gráfico da função quadrática e o coeficiente a é fundamental na modelagem de problemas utilizando a função quadrática.

Também destacamos a relação entre o coeficiente b e a intersecção do gráfico da função quadrática: o valor desse coeficiente está relacionado à localização do ponto de intersecção do gráfico com o eixo x . Já o coeficiente c é o valor da ordenada do ponto da parábola que intersecta o eixo y .

No quinto passo, por meio do comando **intersecção[f, y=0]**, devem aparecer na tela dois pontos, A e B ; esses são os pontos de intersecção da função f com o eixo x . O valor da abscissa deles indica os zeros dessa função. Por fim, no sexto passo, será determinado o valor do discriminante Δ . Após a realização dos passos, os estudantes devem responder às perguntas apresentadas.

Estas seções *Tecnologias digitais* desenvolvem as habilidades a EM13MAT402, ao converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, e a EM13MAT503, na investigação de pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas.

Sugerimos, caso deseje, que o trabalho com essa seção seja feito seguindo a metodologia ativa de sala de aula invertida: requisite aos estudantes que, antes do trabalho em sala de aula com essa seção, realizem previamente os procedimentos em grupos de três a cinco estudantes, o que pode ser feito em sala de aula ou fora do horário de aula. Em seguida, em aula, eles podem se dividir e apresentar aos colegas as próprias descobertas e conclusões obtidas com as atividades propostas nesta seção, em especial, as relações entre os coeficientes e as características do gráfico da função quadrática no plano cartesiano.

Conexões **p. 113**

Nesta seção, é abordada uma atividade com propósito interdisciplinar e de aplicação de um conteúdo matemático que envolve as catenárias, que são curvas que modelam o formato de cordas presas pelas extremidades.

Esta seção permite explorar com os estudantes a influência da Matemática nas artes, por meio das obras de Antoni Gaudí (1852-1926), que ficou famoso por usar catenárias e parábolas em projetos arquitetônicos. Como consequência das obras de Gaudí, o texto apresenta a Gaudí Chair, uma cadeira projetada pelo designer Bram Geenen inspirada pelo trabalho de Gaudí com curvas como a parábola e a catenária.

Esta seção, em especial no trabalho com as atividades 4 e 5, favorece a CG01, ao valorizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico e cultural na compreensão da realidade, a CG03, ao valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural, e a CG05, no uso de tecnologias digitais de informação e de comunicação para a disseminação de informações. Além disso, também favorece as habilidades EM13LGG602, no que tange à prática de apreciar e fruir de diversas manifestações artísticas e culturais mundiais, e EM13CHS106, ao utilizar diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de maneira crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Por fim, destacamos que o trabalho com esta seção favorece o Tema Contemporâneo Transversal “Diversidade Cultural”, considerando as oportunidades oferecidas nesse texto da valorização de manifestações artísticas e arquitetônicas.



Javier Larrea/AGE/Esayphx Brasil

Gaudí fez uso de diversas curvas, como as parábolas e as catenárias, nos projetos, como nesse arco de pedras da Casa Milà, em Barcelona. Foto de 2017.

Conexões p. 120

Nesta seção, é abordada uma atividade com propósito interdisciplinar e de aplicação de um conteúdo matemático que envolve o estudo da trajetória parabólica de uma bola de voleibol ao ser sacada (termo popular no voleibol).

Explore com os estudantes os fenômenos físicos envolvidos no movimento desta bola, descrito por um lançamento oblíquo (movimento que acontece no plano, no qual, na horizontal, o movimento é uniforme e, na vertical, é um movimento uniformemente variado, devido à ação da aceleração gravitacional). Além disso, propomos aos estudantes um estudo sobre os efeitos de resistência do ar sobre corpos, chamado de arrasto.

Nas atividades 1 e 2, o estudante deve resolver problemas de modelagem associados ao lançamento oblíquo de uma bola. Na atividade 3, é proposta uma atividade investigativa a respeito dos benefícios associados à prática de esportes na terceira idade. Nessa atividade, é interessante ressaltar a importância da manutenção da capacidade funcional; integração social; aumento da qualidade de vida em razão da melhora da saúde física, pois a prática de esportes pode evitar dores e mal-estar e prevenir e/ou retardar o aparecimento de algumas doenças, além de auxiliar no tratamento delas.

A descrição do movimento da bola de voleibol por meio das leis de Newton, utilizando a lei da atração gravitacional universal, favorece o desenvolvimento das habilidades EM13CNT202 e EM13CNT204. Esse trabalho também favorece a CECNT02, no que tange à construção e à utilização de interpretações sobre a dinâmica da vida na Terra, em especial devido à gravidade, para elaborar argumentos e realizar previsões sobre aspectos do cotidiano dos seres vivos na Terra.

A atividade 3, que leva os estudantes a refletirem sobre os benefícios das práticas esportivas para pessoas da terceira idade, trabalha os Temas Contemporâneos Transversais “Saúde” e “Processo de Envelhecimento, Respeito e Valorização do Idoso”.

Ao utilizar conhecimentos físicos da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, para explicar o movimento da bola durante a prática de voleibol e valorizar a prática de esportes para a saúde, principalmente de idosos, o estudante desenvolve a CG01.

MAIS SOBRE O ASSUNTO

Para saber mais sobre o efeito Magnus, leia o texto “NBA, força de Magnus e força de arrasto na bola”, disponível em: <https://www.ifufrgs.br/novocref/?contact-pergunta=nba-forcade-magnus-e-forca-de-arrasto-na-bola>. Acesso em: 28 jul. 2020.

Sugerimos também que o trabalho com esta seção seja utilizado para abrir espaço para a discussão sobre os projetos de vida dos estudantes, em especial aqueles que, nos projetos de vida, almejam desenvolver-se em práticas esportivas, como o vôlei. Esta seção pode vir a ser frutífera nessa situação, já que permite apresentar a eles uma importante aplicação da Matemática na prática esportiva do voleibol, de modo a favorecer que estudantes ligados à prática esportiva encontrem maior apreço à Matemática.

Vestibulares e Enem

As atividades de 1 a 12 contemplam a habilidade EM13MAT503, na investigação de pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em diversos contextos, e a habilidade EM13MAT302, na modelagem de situações utilizando funções polinomiais de 2º grau. No geral, os problemas propiciam aos estudantes, em diversos contextos, desenvolver algébrica ou geometricamente o estudo das funções quadráticas.

Nas atividades 3, 4 e 10, os estudantes devem resolver problemas relacionados a trajetórias parabólicas desenvolvidas por corpos, seja uma bola de basquete arremessada por um jogador, seja um projétil lançado por um canhão. Nessas atividades, o foco consiste, na maior parte das vezes, em encontrar a medida de comprimento da altura máxima da trajetória ou a lei da função quadrática que modela tal problema. Nas atividades 5, 8, 9 e 11 têm enfoque em problemas relacionados ao Tema Contemporâneo Transversal “Saúde”.

Mais atividades

1. (PUC-SP) Atribui-se aos pitagóricos a regra para a determinação da tríade que fornece os três lados de um triângulo retângulo. Essa regra é dada por $\left(\frac{m^2 - 1}{2}, m, \frac{m^2 + 1}{2}\right)$ sendo m um número inteiro ímpar e $m > 3$.

Fonte: Carl B. Boyer: História da matemática – Editora Edgard Blücher – 1974 (Adaptado)

Considere um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c , com $b > c$, cujos lados obedeçam a essa regra. Se $a + b + c = 90$, o valor de $a \cdot c$ é

- a) 327 b) 345 c) 369 d) 381

Resolução:

$$\frac{m^2 - 1}{2} + m + \frac{m^2 + 1}{2} = 90 \Rightarrow$$

$\Rightarrow m^2 + m - 90 = 0 \Rightarrow m = -10$ (não serve, pois as medidas de comprimento dos lados não podem ser negativas) ou $m = 9$.

Pelo enunciado, a é a medida de comprimento da hipotenusa (logo, é o maior lado do triângulo) e b é a medida de comprimento do cateto menor (menor lado do triângulo). Dessas informações, temos:

$$a \cdot c = \frac{m^2 + 1}{2} \cdot m = \frac{9^2 + 1}{2} \cdot 9 = 369$$

Alternativa **c**.

2. (UFPE) Num voo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra R\$ 200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R\$ 4,00 por cada lugar não ocupado (por exemplo, se existirem 10 lugares não ocupados o preço de cada passagem será R\$ 240,00). Quantos devem ser os lugares não ocupados para que a companhia obtenha o faturamento máximo?

Resolução:

Seja x o número de lugares não ocupados ($0 \leq x \leq 100$), o faturamento da empresa é dado pela função f que é definida pela lei $f(x) = (100 - x)(200 + 4x)$. Para obter o faturamento máximo, basta determinar a abscissa do vértice da parábola associada à lei de f . Assim:

$$f(x) = 20000 + 400x - 200x - 4x^2 \Rightarrow \Rightarrow f(x) = 5000 + 50x - x^2$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2 \cdot (-1)} = 25$$

Portanto, temos o faturamento máximo quando 25 lugares não estiverem ocupados.

Resoluções do volume

Apresentaremos agora as respostas e resoluções de todas as propostas apresentadas em cada capítulo do Livro do Estudante: abertura do capítulo, situações de início dos tópicos, atividades, boxes e seções.

Capítulo 1 – Função afim

Abertura

Ano após 2019	Produção acumulada em GWh a partir de 2019	Proporção entre a produção acumulada e a quantidade inicial (2019)
0 (2019)	80 000	1
1 (2020)	160 000	2
2	240 000	3
3	320 000	4
4	400 000	5
5	480 000	6
6	560 000	7
7	640 000	8
8	720 000	9
9	800 000	10
10	880 000	11

- a) Exemplo de resposta: O padrão utilizado foi de, a cada ano, aumentar a produção acumulada em 80 000 GWh.
 b) 560 000 GWh; 720 000 GWh.
 c) No ano de 2026.
 d) Em 2029, a estimativa de produção acumulada será de 880 000 GWh; em 2030, de 960 000 GWh; e em 2031, de 1 040 000 GWh. Portanto, ela ultrapassará 1 000 000 GWh no ano de 2031.

e) Estimativa de produção energética acumulada de Itaipu

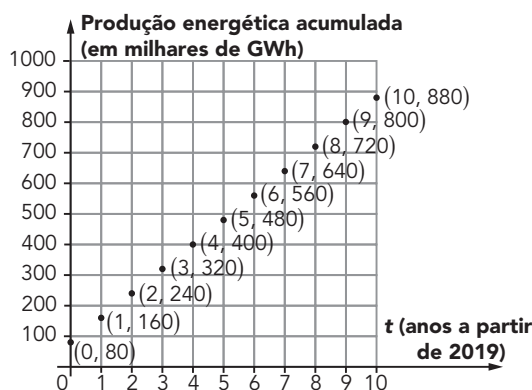


Gráfico elaborado para fins didáticos.

- f) Exemplo de resposta: Os pontos estão alinhados ou pertencem a uma mesma reta.
 g) Se em um ano a estimativa de produção acumulada de energia aumenta em 80 000 GWh, em 6 meses podemos estimar que ela aumenta 40 000 GWh. Portanto, 6 meses após 2019, ela deve ser de aproximadamente:
 $80\,000 \text{ GWh} + 40\,000 \text{ GWh} = 120\,000 \text{ GWh}$
 h) Exemplo de resposta: $E = 80\,000 + 80\,000t$.
 i) Para responder a este item, é esperado que o estudante consulte o gráfico elaborado no item e ou resolva a equação $E(t) = 600\,000$.
 $E(t) = 600\,000 \Rightarrow 80\,000 + 80\,000t = 600\,000 \Rightarrow 80\,000t = 520\,000 \Rightarrow t = 6,5$. Portanto, em 7 anos após 2019, a produção energética acumulada de Itaipu ultrapassaria 600 000 GWh (que equivale a 600 TWh).

Situações (p. 12)

- a) Como a máquina transforma parte da fruta em purê e parte em suco, o produto final será, nesse caso, purê de laranja e suco de laranja.
 b) De modo análogo, o produto final será purê e suco de maçã.
 c) Exemplo de resposta: Retirar cascas e caroços, processar a fruta e separar o purê do suco.
- a) Pelo enunciado, a quantidade de gotas é igual ao dobro do valor numérico da medida de massa da criança em quilogramas.
 Portanto, a criança de 5 kg deve tomar 10 gotas ($2 \cdot 5 = 10$) e a criança de 10 kg deve tomar 20 gotas ($2 \cdot 10 = 20$).
 b) Operação de multiplicação.
 c) Multiplicar a medida de massa por 2.
- a) Como cada 1 litro de combustível permite ao carro percorrer 12 km, então a medida de distância máxima será, aproximadamente, 540 km ($12 \cdot 45 = 540$).
 b) Operação de multiplicação.
 c) $x \cdot 12$
- a) $5 \text{ h} = 3 \text{ h} + 2 \cdot 1 \text{ h}$, então a quantia paga será dada por $\text{R\$ } 14,00 + 2 \cdot \text{R\$ } 1,50 = \text{R\$ } 17,00$. Portanto, a quantia paga será de $\text{R\$ } 17,00$.
 b) $\text{R\$ } 21,50 = \text{R\$ } 14,00 + \text{R\$ } 7,50$

valor pelas
3 primeiras
horas

valor pelas
horas
seguintes

 Como $\frac{\text{R\$ } 7,50}{\text{R\$ } 1,50} = 5$, o motorista estacionou 5 horas além das 3 horas iniciais.
 c) Como 2 horas é menos do que 3 horas, o valor pago será $\text{R\$ } 14,00$.
 d) Resposta pessoal.
 e) Exemplo de resposta: Se x está entre 0 e 3, o preço a pagar é $\text{R\$ } 14,00$. Se x é igual a ou maior do que 3, o preço a pagar é dado por $14 + 1,5 \cdot (x - 3)$, em reais.

Refleta (p. 14)

- $f(10) = 4,50 \cdot 10 = 45$. Portanto, o preço de 10 litros de gasolina é $\text{R\$ } 45,00$.
 - $f(x) = 4,50x \Rightarrow 58,5 = 4,5x \Rightarrow x = \frac{58,5}{4,5} \Rightarrow x = 13$
- Portanto, com $\text{R\$ } 58,50$ podem ser comprados 13 litros de gasolina.

Refleta (p. 15)

- $4 \cdot 3,5 = 14$
A medida de comprimento do perímetro é 14 cm.
- $\frac{22}{4} = 5,5$
A medida de comprimento do lado é 5,5 cm.

Atividades

1. $f(x) = 3x + 1$
Exemplo de resposta:

Início

Nomeie de x o valor de entrada.

Crie n

$n \leftarrow 3 \cdot x + 1$

Saída: n

Fim

2. a) -1; 3; 7; 11; 15.
b) -6; -1; 4; 9; 14.
c) 6; 9; 12; 15; 18.
d) 1; 1,5; 2; 2,5; 3.
3. a) A medida de área A e a medida de comprimento do lado ℓ da região quadrada.
b) A medida de área A .
c) A medida de comprimento do lado ℓ .
d) $A = \ell^2$
e) $A = 12^2 = 144$. Portanto, a área da região quadrada mede 144 cm^2 .
f) $169 = \ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{169} = 13$. Portanto, a medida de comprimento do lado é igual a 13 cm.
4. a) $f(x) = \frac{x}{3}$
b) $f(x) = 2x - 3$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
d) $f(x) = x^3 + x^2$

5.

x (em h)	d (em km)
1	56
2	106
3	156
4	206
5	256

6. a) Sendo x o número de unidades vendidas, a receita, em reais, é dada por $R(x) = 0,8x$, e o custo, em reais, é dado por $C(x) = 40 + 0,3x$. O lucro, em reais, é dado então por $L(x) = R(x) - C(x) = 0,5x - 40$.
Para que não haja nem lucro nem prejuízo, $L(x)$ deve ser igual a zero. Então, $0,5x - 40 = 0 \Rightarrow 0,5x = 40 \Rightarrow x = 80$. Portanto, o fabricante deve vender 80 unidades para não ter lucro nem prejuízo.
b) $L(200) = 0,5 \cdot 200 - 40 = 60 > 0$. O fabricante terá lucro.
c) Resposta pessoal.

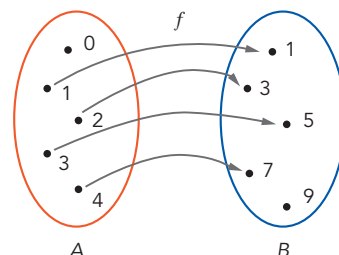
Refleta (p. 18)

Porque, na função do exemplo **a**, cada elemento de A está associado ao quádruplo dele em B .

Atividades

7. a) Não representa uma função de A em B , pois o elemento 5 de A não está relacionado a um elemento em B .
b) Representa uma função de A em B .
c) Não representa uma função de A em B porque o elemento -2,7 de A não está relacionado a um elemento em B e porque os elementos 0,5 e $-\frac{1}{3}$ de A estão, cada um, relacionados a mais de um elemento de B .
d) Não representa uma função de A em B , pois os elementos 1 e 2 de A estão, cada um, relacionados a mais de um elemento de B .

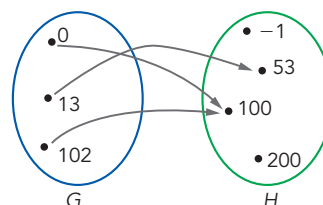
8. a)



- b) f não representa uma função de A em B , pois o elemento 0 de A não está relacionado a um elemento em B .

9. a) Exemplo de resposta: $G = \{0, 13, 102\}$ e $H = \{-1, 53, 100, 200\}$.
b) Exemplo de resposta:

$x \in G$	0	13	102
$y \in H$	100	53	100



Refleta (p. 19)

- $f(x) = 2^x$
- Porque não são imagem de nenhum elemento do domínio de f .

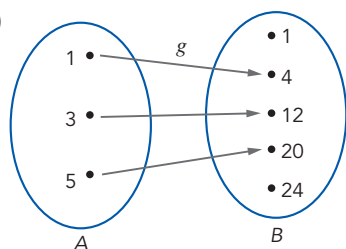
Refleta (p. 19)

$$f(x) = -x$$

Atividades

10. a) $D(f) = \{1, 3, 5, 7\}$; $CD(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
b) $\text{Im}(f) = \{4, 6, 8\}$
c) $f(3) = 4$
d) Sim; 2 e 10.
e) Não.
f) Sim; 8 ($f(5) = f(7) = 8$).

11. a)



WYV Design/Arquivo da editora

- b) $D(g) = \{1, 3, 5\}$; $CD(g) = \{1, 4, 12, 20, 24\}$; $Im(g) = \{4, 12, 20\}$.
 c) $g(3) = 4 \cdot 3 = 12$
 d) $g(x) = 20 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$
 e) $g(x) = 4 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

Situações (p. 20)

1. a) Metade da medida de volume inicial na piscina é $\frac{1}{2} \cdot 6000 \text{ L} = 3000 \text{ L}$. Se 600 L são esvaziados a cada 30 minutos e $3000 \text{ L} = 5 \cdot 600 \text{ L}$, então em 2 h 30 min a medida de volume de água na piscina chegará à metade da medida de volume inicial ($5 \cdot 30 \text{ min} = 150 \text{ min} = 2 \text{ h } 30 \text{ min}$).
 b) $6000 - 2000 = 4000$
 $\frac{4000}{1200} = \frac{10}{3}$, e $\frac{10}{3} \text{ h}$ é igual a 3 horas e 20 minutos. Portanto, em 3 h 20 min a piscina terá 2000 L.
 c) $\frac{6000}{1200} = 5$. Portanto, ela se esvaziará em 5 horas.
 d) Exemplo de resposta: Sendo v a medida de volume esvaziada e t a medida de intervalo de tempo, $v(t) = 1200t$.
 e) Exemplo de resposta: Sendo u a medida de volume restante e t a medida de intervalo de tempo, temos: $u(t) = 6000 - 1200t$
2. a) R\$ 50,00 ————— x
 1 kg ————— 0,6 kg
 $x = 50 \cdot 0,6 = 30$. A quantia paga será de R\$ 30,00.
 b) R\$ 50,00 ————— R\$ 21,50
 1 kg ————— x
 $x = \frac{21,50}{50,00} = 0,43$. A medida de massa é 0,43 kg.
 c) Exemplo de resposta: Sendo p a quantia paga, em reais, e m a medida de massa de comida, em gramas, temos: $p(m) = 0,05m$
3. a) Para responder às perguntas, precisamos descobrir primeiro a taxa de variação da medida de velocidade pelo tempo. Se, em 20 s, houve uma redução de 20 km/h ($80 \text{ km/h} - 60 \text{ km/h}$), então, pela taxa de variação constante da medida de velocidade, em 1 s ocorre uma redução de 1 km/h.
 A medida da velocidade máxima é 50 km/h, então, deve haver uma redução de 30 km/h na medida da velocidade ($80 \text{ km/h} - 50 \text{ km/h}$), que ocorrerá em 30 s.
 b) Para o carro passar de 80 km/h para 0 km/h, a medida de intervalo de tempo será 80 s.
 c) Sendo v a medida de velocidade do móvel e t a medida de intervalo de tempo de frenagem, $v(t) = 80 - t$.
 d) Exemplos de resposta: Uso de cinto de segurança, para evitar que frenagens bruscas causem danos físicos aos passageiros; evitar frear bruscamente, para não causar colisões e atropelamentos.

Explore para descobrir (p. 22)

1. Não é possível calcular nenhum dos valores. Existem várias possibilidades de valor fixo inicial e de valor por quilômetro rodado que totalizariam os R\$ 52,00. Por exemplo, o valor fixo inicial poderia ser R\$ 2,00 e o valor por quilômetro rodado poderia ser R\$ 2,50 ($2 + 20 \cdot 2,5 = 52$), ou o valor fixo inicial poderia ser R\$ 12,00 e o valor por quilômetro rodado poderia ser R\$ 2,00 ($12 + 20 \cdot 2 = 52$).
2. Sim, é possível calcular os dois valores. Como o valor fixo inicial é o mesmo para as duas corridas nesse aplicativo, a diferença entre o preço da corrida de 12,5 km e o da corrida de 10 km (R\$ 3,75) corresponde ao valor variável pago por uma corrida de 12,5 km — 10 km = 2,5 km.
 Como $\frac{3,75}{2,5} = 1,5$, o valor por quilômetro rodado é R\$ 1,50 e o valor fixo inicial, R\$ 8,00 ($23 - 10 \cdot 1,5 = 8$).
3. Exemplo de resposta: Sendo p o valor da corrida e d a medida de distância percorrida, $p(d) = 8 + 1,5d$.
4. A partir da resposta à atividade 1, duas leis de função que poderiam satisfazer essa condição são: $p(d) = 2 + 2,5d$ e $p(d) = 12 + 2d$
5. Não. Exemplo de justificativa: Um aplicativo que cobra o valor fixo de R\$ 1,00 e o valor por quilômetro rodado de R\$ 2,00 é menos vantajoso do que um aplicativo que cobra um valor fixo de R\$ 5,00 mais o valor por quilômetro rodado de R\$ 1,00 para medidas de distâncias maiores do que 4 km.

Refleta (p. 23)

- São funções polinomiais de 1ª grau os exemplos **a**, **b**, **c** e **d**.
- Porque, em ambos os casos, a imagem de qualquer ponto do domínio é constante, sendo igual a zero, se for uma função constante nula, ou diferente de zero, se for uma função constante não nula.
- O exemplo **e** é uma função constante não nula. O exemplo **f** é uma função nula.

Atividades

12. a) Para $c = 24$, temos $N = \frac{5}{4} \cdot 24 + 7 = 37$.
 O número do sapato é 37.
 b) Para $N = 40$, temos $40 = \frac{5c + 28}{4} \Rightarrow 160 - 28 = 5c \Rightarrow c = 26,4$.
 A medida de comprimento do pé é igual a 26,4 cm.
13. Como isso ocorrerá x anos após o verão de 2016, temos as seguintes idades:
 Alfredo: $40 + x$
 Pedro: $10 + x$
 Aline: $8 + x$
 Paloma: $6 + x$
 Como a idade do pai deve ser igual à soma das idades dos filhos, teremos:
 $40 + x = (10 + x) + (8 + x) + (6 + x) \Rightarrow 40 = 24 + 2x \Rightarrow x = 8$
 $2016 + 8 = 2024$
 Isso deve ocorrer nas férias de verão de 2024.
 Alternativa **d**.

14. a) $10 \text{ min} = \frac{1}{6} \text{ hora}$

Para $t = \frac{1}{6}$, temos $S_1 = 174 + 93 \cdot \frac{1}{6} = 189,5$.

Para $t = \frac{1}{6}$, temos $S_2 = 235 - 90 \cdot \frac{1}{6} = 220$.

O veículo que sai de Rio Claro estará a km 189,5 e o veículo que sai de São Carlos estará a km 220 da Rodovia Washington Luís.

b) $S_1 - S_2 = 30 \Rightarrow 174 + 93t - (235 - 90t) = 30 \Rightarrow 174 - 235 + 93t + 90t = 30 \Rightarrow 183t = 91 \Rightarrow t = \frac{91}{183}$

$S_2 - S_1 = 30 \Rightarrow 235 - 90t - (174 + 93t) = 30 \Rightarrow 235 - 174 - 90t - 93t = 30 \Rightarrow 183t = 31 \Rightarrow t = \frac{31}{183}$

Os instantes são $\frac{31}{183} \text{ h}$ e $\frac{91}{183} \text{ h}$.

15. a) $35 = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow 315 = 5F - 160 \Rightarrow F = 95$

A medida de temperatura é 95 °F.

b) $C = \frac{5}{9}(2C - 32) \Rightarrow 9C = 10C - 160 \Rightarrow C = 160$

A medida de temperatura é 160 °C.

16. $328 = 5 \cdot \left(\frac{T_F - 32}{9} \right) + 273 \Rightarrow 55 \cdot 9 = 5T_F - 160 \Rightarrow T_F = 131$

A medida de temperatura é 131 °F.

Alternativa c.

17. $5C = F$

$C = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow C = \frac{5}{9}(5C - 32) \Rightarrow 9C = 25C - 160 \Rightarrow C = 10$

$F = 5 \cdot 10 = 50$

A medida de temperatura é 50 °F.

18. $C = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow C = \frac{5}{9}(120 - 32) \Rightarrow C \approx 48,9$

A medida de temperatura é aproximadamente 48,9 °C.

19. $C = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow 50 = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow 450 = 5F - 160 \Rightarrow F = 122$

A medida de temperatura é 122 °F.

20. $c(t) = 0,1t + 4 \Rightarrow c(39) = 0,1 \cdot 39 + 4 = 3,9 + 4 = 7,9$

A medida de comprimento da coluna de mercúrio era 7,9 cm.

21. $Q = mc\Delta t \Rightarrow 10000 = 500 \cdot 1 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{10000}{500} = 20$

A medida de temperatura final é igual a 30 °C ($10 + 20 = 30$).

30 °C em kelvin é igual a 303 K ($30 + 273 = 303$).

Alternativa e.

22. a) Resposta esperada: Os pais do menino estavam conversando sobre uma diminuição brusca na medida de temperatura e queriam avisá-lo para que pudesse se prevenir. O menino entendeu que ele havia derrubado algum objeto na casa e seria castigado por isso.

b) Resposta esperada: Essas associações são feitas porque nos termômetros de álcool colorido, a medida de comprimento da coluna de álcool diminui ou aumenta; isso passa uma falsa sensação de que a temperatura abaixa ou sobe.

c) Resposta pessoal.

23. a) $a = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{5 - (-7)}{1 - (-3)} = \frac{12}{4} = 3$

$b = f(x) - ax = f(1) - 3 \cdot 1 = 5 - 3 = 2$

$f(x) = 3x + 2$

b) $a = \frac{f(-1) - f(2)}{-1 - 2} = \frac{7 - 1}{-1 - 2} = \frac{6}{-3} = -2$

$b = f(x) - ax = f(-1) - (-2) \cdot (-1) = 7 - 2 = 5$

$f(x) = -2x + 5$

24. A taxa de variação média a é dada por:

$a = \frac{280 - 150}{20 - 10} = \frac{130}{10} = 13$

Esse resultado mostra que a taxa média de variação do lucro dessa aplicação foi de R\$ 13,00 por dia.

25. a) $s(t) = s_0 + vt \Rightarrow s(t) = 6 + 5t$

b) $s = 6 + 5 \cdot 20 = 106$. Após 20 s, o carro estará na posição 106 m. Como ele estava inicialmente na posição 6 m, terá percorrido 100 m, pois $106 - 6 = 100$.

c) Comparando as posições em $t = 0$ ($s = 6$) e $t = 20$ ($s = 106$), temos: $\frac{106 - 6}{20 - 0} = \frac{100}{20} = 5$. Portanto, a taxa de variação da posição do carro é igual a 5. Isso significa que, a cada segundo, o carro anda 5 metros.

d) Resposta pessoal.

26. a) $f(x) = \text{custo fixo} + \text{custo variável}$

$f(x) = 8 + 0,50x$

b) 0,50 e $f(0) = 8$.

c) $f(100) = 8 + 0,50 \cdot 100 = 8 + 50 = 58$
O custo de 100 peças é R\$ 58,00.

27. a) **Retângulo**

Medida de comprimento da largura (cm)	Medida de perímetro (cm)
1	12
1,5	13
2	14
3	16
4	18

Tabela elaborada para fins didáticos.

b) $f(x) = 10 + 2x$

c) A taxa de variação é 2 e o valor inicial é 10.

28. Observe que o valor inicial é $b = 60$ e que a taxa de variação é $a = -2$.

Portanto, $V(t) = -2t + 60$.

Alternativa b.

29. a) Modelo A: $f_A(x) = 50 + 0,37x$

Modelo B: $f_B(x) = 63 + 0,37x$

Modelo C: $f_C(x) = 75 + 0,37x$

b) Pelo enunciado e pela lei das funções apresentadas no item anterior, temos que a taxa de variação de cada uma dessas funções é igual a 0,37.

30. a) $f(t) = at + b$. Pelo enunciado, $a = 5$ e $b = 10$, portanto, $f(t) = 10 + 5t$.

b) taxa de variação: $a = 5$

c) valor inicial: $b = 10$

d) Resposta pessoal.

31. A função é dada pela lei $\ell = aC + b$.

Para $C_1 = 15$ e $\ell_1 = 76,45$, temos $76,45 = 15a + b \Rightarrow b = 76,45 - 15a$.

Para $C_2 = 100$ e $\ell_2 = 76,56$, temos $76,56 = 100a + b \Rightarrow 76,56 = 100a + 76,45 - 15a \Rightarrow 85a = 0,11 \Rightarrow a = \frac{11}{8500}$.

Logo, $b = 76,45 - 15 \cdot \frac{11}{8500} \Rightarrow b = \frac{32483}{425}$.

A lei da função é $\ell = \frac{11}{8500}C + \frac{32483}{425}$.

32. A lei da função afim pode ser $f(x) = ax + b$, em que x é a concentração de SO_2 e $f(x)$ indica o número de mortes. Pelos dados do quadro, temos:

- $f(401) = a \cdot 401 + b = 106 \Rightarrow b = 106 - 401a$
- $f(500) = a \cdot 500 + b = 109 \Rightarrow 500a + 106 - 401a = 109 \Rightarrow a = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}$

Logo, $b = 106 - 401 \cdot \frac{1}{33} \Rightarrow b = \frac{3097}{33}$.

A lei da função é $f(x) = \frac{1}{33}x + \frac{3097}{33}$.

Para $f(x) = 115$, temos: $f(x) = \frac{1}{33}x + \frac{3097}{33} = 115 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \left(115 - \frac{3097}{33}\right) \cdot 33 = 698$.

A concentração é $698 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

33. a) Pelo fluxograma, quando o valor da venda do imóvel é superior a R\$ 50.000,00, a lei da função que expressa o lucro, em reais, é $c = 0,10x$.
- b) Pelo fluxograma, quando o valor da venda do imóvel é inferior ou igual a R\$ 50.000,00, a lei da função que expressa o lucro, em reais, é $c = 0,05x$.
- c) Se ele for vendido por R\$ 25.000,00, o lucro será de 5% do valor de venda, que é R\$ 1.250,00. Se for vendido por R\$ 60.000,00, o lucro será de 10% do valor de venda, que é R\$ 6.000,00.

34. $t(a) = -\frac{a}{300} + 100 \Rightarrow t(3000) = -\frac{3000}{300} + 100 = 90$

$t(a) = -\frac{a}{300} + 100 \Rightarrow t(-430) = -\frac{-430}{300} + 100 \approx 101,43$

Portanto, as medidas de temperatura de ebulição da água no pico da Neblina e na região do mar Morto são, aproximadamente, 90°C e $101,43^\circ\text{C}$, respectivamente.

35. A medida de temperatura T , em grau Celsius, será dada em função da medida de intervalo de tempo t , em minutos.

a) Para a sala A, a relação é: $T_A(t) = -0,8t + 28$.
Após 10 minutos: $T_A(10) = -0,8 \cdot 10 + 28 = 20 \Rightarrow T_A(10) = 20$.

Para a sala B, temos a relação: $T_B(t) = -0,9t + 30$.
Após 10 minutos: $T_B(10) = -0,9 \cdot 10 + 30 = 21 \Rightarrow T_B(10) = 21$.

Portanto, as medidas de temperatura nas salas A e B quando os aparelhos são desligados são, respectivamente, 20°C e 21°C .

b) Temos: $\begin{cases} T_A(t) = -0,8t + 28 \\ T_B(t) = -0,9t + 30 \end{cases}$

Fazendo $T_A(t) = T_B(t)$, temos: $-0,8t + 28 = -0,9t + 30 \Rightarrow 0,1t = 2 \Rightarrow t = 20$.

As medidas de temperatura se igualariam depois de 20 minutos.

36. a) A lei da função afim pode ser $V = at + b$, em que V é a medida de volume do gás, em cm^3 , e t é a medida de temperatura, em $^\circ\text{C}$. Do enunciado, temos:

- $500 = a \cdot 27 + b \Rightarrow b = 500 - 27a$
- $605 = a \cdot 90 + b \Rightarrow 90a + 500 - 27a = 605 \Rightarrow 63a = 105 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$

Logo, $b = 500 - 27 \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow b = 455$.

A lei da função é $V = \frac{5}{3}t + 455$.

b) Para $V = 0$, temos $\frac{5}{3}t + 455 = 0 \Rightarrow 5t + 1365 = 0 \Rightarrow \Rightarrow t = -273$.

A medida de temperatura é -273°C .

37. $F(a) = m \cdot a \Rightarrow 10000 = 20a \Rightarrow a = 500$. A medida de intensidade da aceleração deverá ser de 500 m/s^2 .

38. a) Sendo $C(x) = ax + b$, temos:

$a = \frac{C(900) - C(600)}{900 - 600} = \frac{15800 - 14000}{900 - 600} = \frac{1800}{300} = 6$

$b = C(x) - 6x = C(600) - 6 \cdot 600 = 14000 - 3600 = 10400$

Portanto, $C(x) = 6x + 10400$.

- b) $C(1200) = 6 \cdot 1200 + 10400 = 17600$. Portanto, o valor do custo mensal máximo é igual a R\$ 17.600,00.

39. a) $v = \frac{400 - 100}{5} = \frac{300}{5} = 60$

A medida de velocidade é igual a 60 m/s .

- b) Como a velocidade mede 60 m/s e a posição inicial do móvel é 100 m , então a lei da função da posição em relação a medida de intervalo de tempo $S = 60t + 100$.

c) $S = 60 \cdot 10 + 100 = 600 + 100 = 700$

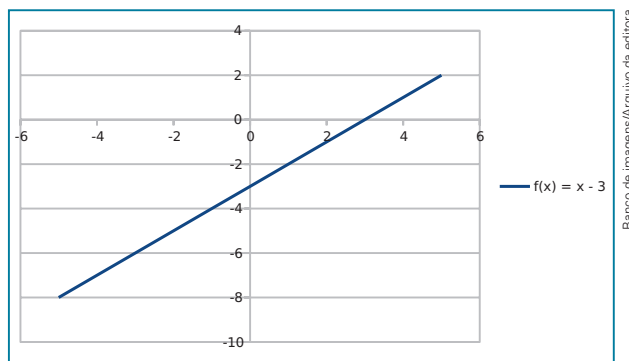
A posição é 700 m .

- d) $1000 = 60t + 100 \Rightarrow 60t = 900 \Rightarrow t = 15$
O instante é 15 s .

Tecnologias digitais (p. 32)

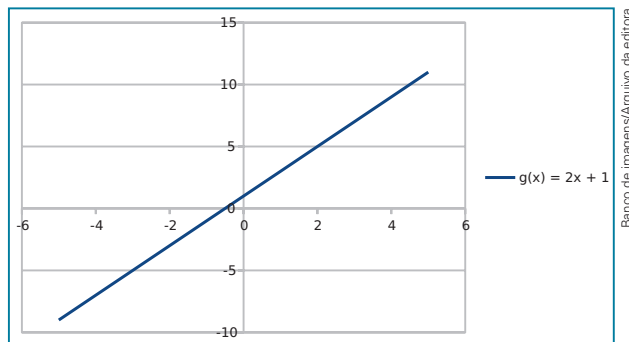
1.

Gráfico da função $f(x) = x - 3$



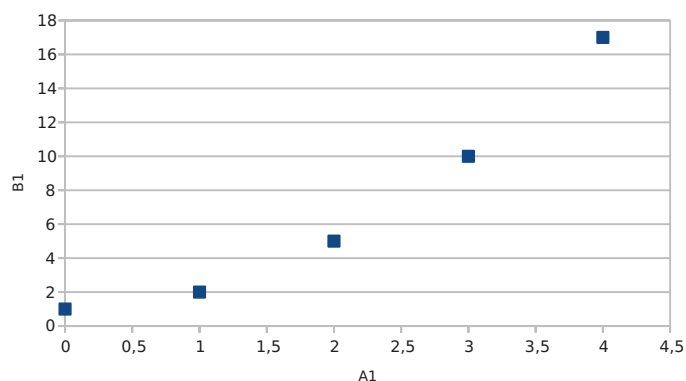
Banco de Imagens/Arquivo da editora

Gráfico da função $g(x) = 2x + 1$



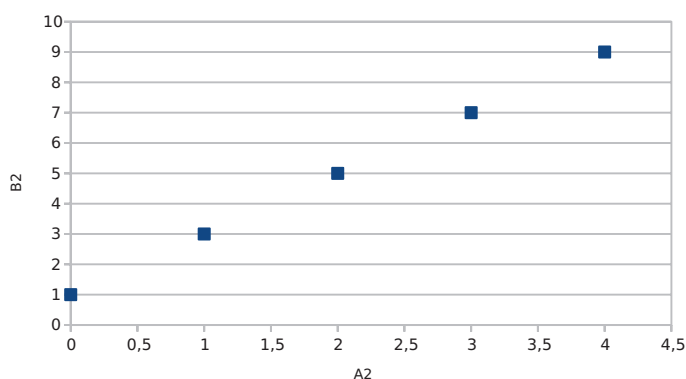
Banco de Imagens/Arquivo da editora

2. Conjunto de dados 1



Banco de imagens/Arquivo da editora

Conjunto de dados 2

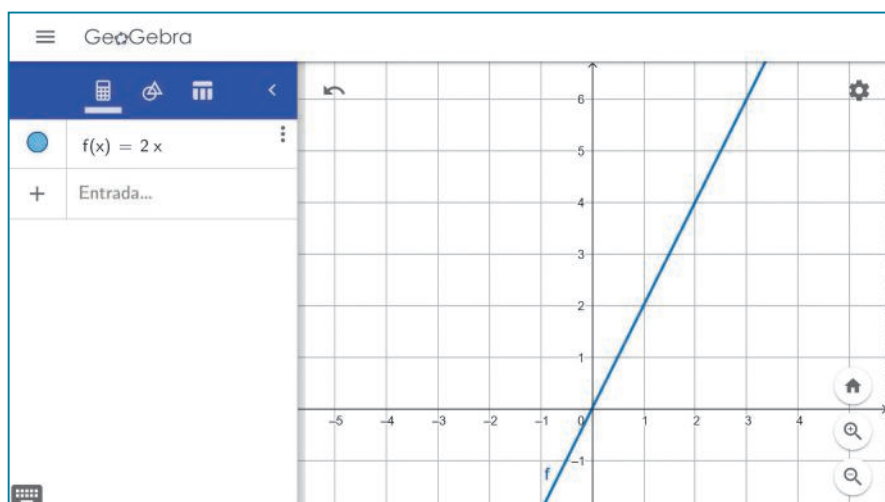


Banco de imagens/Arquivo da editora

O conjunto de dados que representa uma relação que pode ser modelada por uma função afim é o conjunto de dados 2, pois os dados apresentam taxa de variação constante. A lei dessa função é $f(x) = 2x + 1$.

Tecnologias digitais (p. 34)

- a) Devemos adicionar 1 unidade, assim como foi feito com o coeficiente b da função.
b) O coeficiente b deve ser igual a 0 para que o gráfico da função f passe pela origem $(0, 0)$ do plano cartesiano.



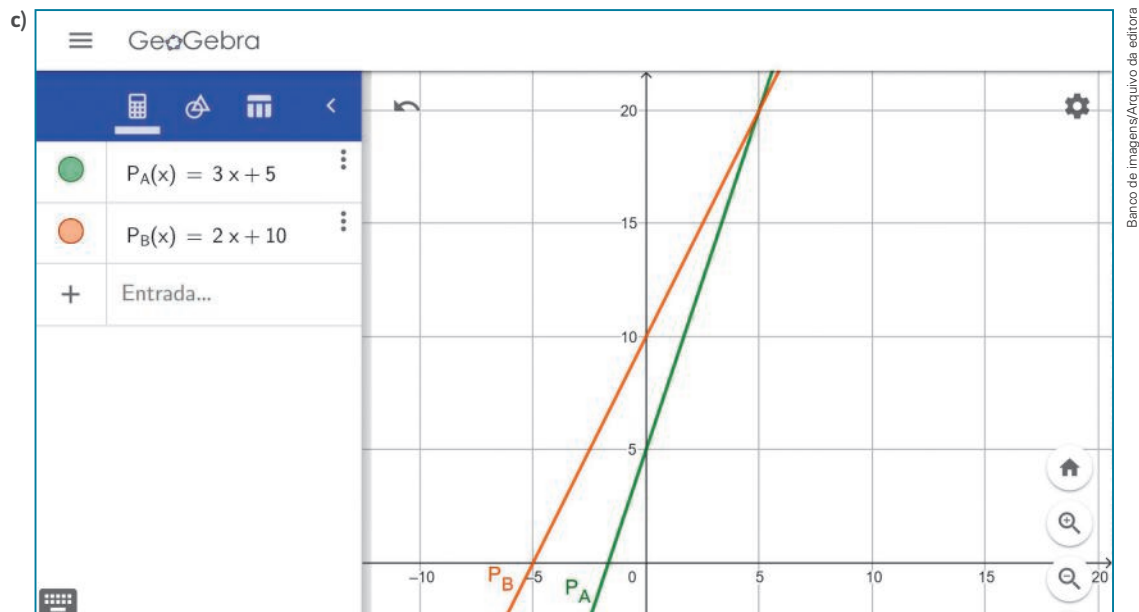
Banco de imagens/Arquivo da editora

Refleta (p. 36)

Porque, no primeiro exemplo, $D(f) = \{0, 1, 2\}$ e, no segundo exemplo, $D(f) = \mathbb{R}$.

Tecnologias digitais (p. 37)

1. a) Quando o valor de a é positivo, o gráfico é ascendente e, quanto maior o valor, maior a inclinação. Quando $a = 0$, o gráfico está na horizontal (paralelo ao eixo x). Já quando o valor de a é negativo, o gráfico é descendente e, quanto menor o valor, maior a inclinação.
- b) O coeficiente b é igual ao valor da ordenada do ponto de cruzamento do gráfico com o eixo y . Por isso, se o valor de b é positivo, quanto maior for esse valor, mais acima da origem o gráfico da função intersecta o eixo y . Se o valor de b é negativo, quanto menor for esse valor, mais abaixo da origem o gráfico intersecta o eixo y . Por fim, se b é igual a zero, o gráfico intersecta o eixo y na origem do plano cartesiano.
2. a) Sendo P_A e P_B os preços, em reais, do frete nas lojas **A** e **B**, respectivamente, e x a quantidade de livros comprados, pelo enunciado, temos $P_A(x) = 3x + 5$ e $P_B(x) = 2x + 10$.
- b) $P_A(4) = 3 \cdot 4 + 5 = 17$
 $P_B(4) = 2 \cdot 4 + 10 = 18$
 Portanto, o preço de frete é mais barato na loja **A**.



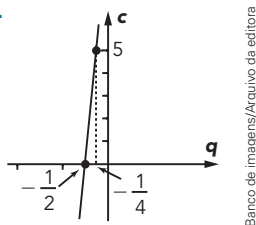
A abscissa do ponto de encontro mostra a quantidade de livros em que o preço do frete é o mesmo nas 2 lojas. Analisando o gráfico, percebe-se que, para menos de 5 livros, o preço do frete é menor na loja **A**; para 5 livros, o valor do frete é o mesmo nas 2 lojas; e, para mais de 5 livros, o valor do frete é menor na loja **B**.

Reflita (p. 39)

Porque o gráfico da função identidade é uma reta que divide os ângulos que delimitam esses dois quadrantes em ângulos de mesma medida de abertura.

Atividades

40.



41. Seja $Y = aC + b$ a lei da função pedida. De acordo com o gráfico, sabemos que $b = 20$ e que o ponto $(100, 80)$ pertence ao gráfico.

Podemos calcular a : $Y = aC + 20 \Rightarrow 80 = a100 + 20 \Rightarrow 100a = 60 \Rightarrow a = \frac{60}{100} \Rightarrow a = 0,6$.

A lei da função é: $Y = 0,6C + 20$.

Alternativa **c**.

42. a) Exemplo de resposta:

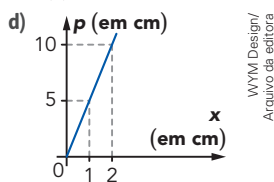
Pentágono regular

Medida de comprimento do lado (x)	Medida de perímetro (p)
1,0 cm	5 cm
1,5 cm	7,5 cm
2,0 cm	10,0 cm
2,5 cm	12,5 cm

Tabela elaborada para fins didáticos.

- b) Se a medida de comprimento do lado dobra, a medida de perímetro dobra; se a medida de comprimento do lado triplica, a medida de perímetro triplica.

c) $p(x) = 5x$



- e) Variação linear ou constante.

- f) $p(x)$ é uma função linear, mas não é uma função identidade.

43. a) O gasto total foi:

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{5} + 10 = \frac{2x + 4x + 100}{10} = \frac{3}{5}x + 10$$

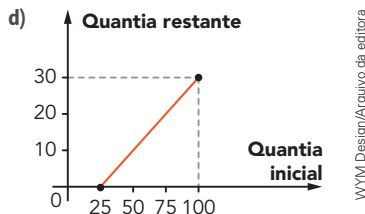
$$Q = x - \left(\frac{3}{5}x + 10\right) = \frac{5x}{5} - \frac{3x}{5} - 10 \Rightarrow Q = \frac{2x}{5} - 10$$

- b) Para $x = 40$, temos $Q = \frac{2 \cdot 40}{5} - 10 = 16 - 10 = 6$.

Restaram R\$ 6,00.

- c) Para $Q = 4,40$, temos $4,4 = \frac{2x}{5} - 10 \Rightarrow 14,4 = \frac{2x}{5} \Rightarrow x = 36$.

A quantia inicial deve ser R\$ 36,00.



44. a) $V = \frac{40 - 10}{3} = \frac{30}{3} = 10$

A medida de velocidade é 10 m/s.

- b) Como a medida de velocidade é 10 m/s e a posição inicial é 10 m, a lei da função do movimento desse ponto material é $S = 10t + 10$.

c) $S = 10 \cdot 3 + 10 = 30 + 10 = 40$

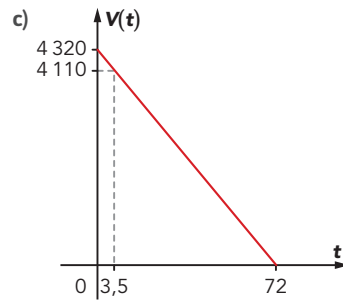
A posição é 40 m.

45. a) $t = 3,5 \Rightarrow V(3,5) = -60 \cdot (3,5) + 4320 = -210 + 4320 = 4110$

A medida de volume de água é 4110 litros.

b) $V(t) = 0 \Rightarrow -60t + 4320 = 0 \Rightarrow 60t = 4320 \Rightarrow t = 72$

A medida de intervalo de tempo é 72 horas.



- d) Resposta pessoal.

46. O valor inicial é $b = 200$ e a taxa de variação pode ser calculada por $a = \frac{0 - 200}{8 - 0} = \frac{-200}{8} = -25$.

Temos a função $f(t) = -25t + 200$.

Portanto, $f(5) = -25 \cdot 5 + 200 = 75$.

Havia 75 pessoas.

Alternativa d.

47. a) $d = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \frac{1,706}{2} \Rightarrow d = 0,853$

A medida de densidade é 0,853 kg/L.

b) $\frac{1,706}{2} = \frac{4,265}{k} \Rightarrow 0,853k = 4,265 \Rightarrow k = \frac{4,265}{0,853} = 5$

O valor da abscissa é 5.

c) $y = 0,853x$

- d) Resposta pessoal.

48. Se a evolução dos preços, ano a ano, permanecer constante, podemos representar esse comportamento com uma função afim.

Seja f essa função. Então, $f(2017) = 0,53$ e $f(2018) = 0,6$.

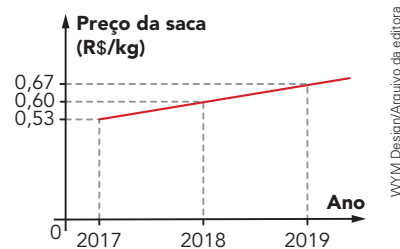
A taxa de variação é $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,6 - 0,53}{2018 - 2017} = 0,07$.

$f(x) = ax + b \Rightarrow 0,6 = 0,07 \cdot 2018 + b \Rightarrow$

$\Rightarrow b = -140,66$.

Logo, a lei da função é $f(x) = 0,07x - 140,66$.

Portanto, para $x = 2$, temos: $f(2019) = 0,67$.



49. a) Ao final da primeira hora, a primeira torneira encheu $\frac{1}{10}$ do tanque e a segunda, $\frac{1}{12}$.

Juntas, terão enchido $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{6+5}{60} = \frac{11}{60}$.

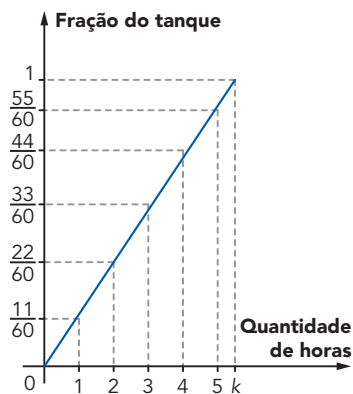
Logo, a cada hora, as 2 torneiras juntas enchem mais

$\frac{11}{60}$ do tanque.

Portanto, ao final de cada uma das 5 primeiras horas, as

torneiras terão enchido, respectivamente, $\frac{11}{60}$, $\frac{22}{60}$, $\frac{33}{60}$, $\frac{44}{60}$ e $\frac{55}{60}$ do tanque.

- b) Seja k a quantidade de horas que leva para o tanque encher. Graficamente, temos:



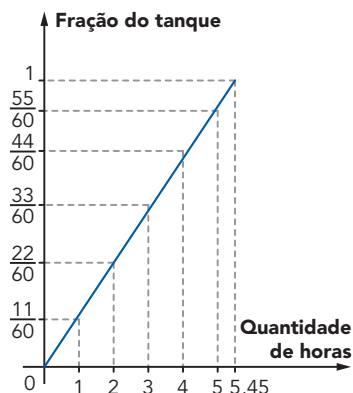
WYM Design/Arquivo da editora

Pelo gráfico, a função que relaciona a medida de intervalo de tempo t , em horas, com a fração do tanque que está preenchida de água é $R(t) = \frac{11}{60}t$.

Logo, $R(k) = 1 \Rightarrow \frac{11}{60}k = 1 \Rightarrow k = \frac{60}{11} \approx 5,45$.

A medida de intervalo de tempo gasto para encher o tanque será de aproximadamente 5,45 horas.

O gráfico fica, então, da seguinte maneira.



WYM Design/Arquivo da editora

Leitura e compreensão (p. 43)

- Exemplo de resposta: Para a maioria das plantas, fatores que influenciam no crescimento delas são a iluminação e a concentração de CO_2 no ambiente; a quantidade de água e nutrientes disponíveis para a planta; a influência das estações do ano em plantas.
- Exemplo de resposta: A alta concentração de CO_2 na atmosfera, devido ao fato de o dióxido de carbono ser um dos gases que intensificam o efeito estufa, contribui para que a energia solar absorvida pela Terra durante o dia não consiga voltar para o espaço, provocando o aumento da medida de temperatura média do planeta. Entre outros problemas, a elevação da medida de temperatura média do planeta pode provocar um aumento no nível dos oceanos (por causa do derretimento de geleiras que estão sobre o continente).

Alguns dos fatores que acarretam a alta concentração de CO_2 são os desmatamentos, as queimadas e a queima de combustíveis de origem fóssil. Para reduzir esse aumento na concentração, há soluções como: o uso de sistemas florestais com plantas que favorecerem a captação de CO_2 da atmosfera (sequestro de carbono), como a *Senna alata*; políticas públicas de redução do desmatamento e de incentivo ao reflorestamento, fontes de energia renováveis e consumo sustentável.

- Exemplos de resposta: Para alguns intervalos de profundidade, a variação da medida de pressão que age sobre um mergulhador em função da medida de profundidade; a relação entre a medida de volume do combustível usado para abastecer o carro em um posto e o valor a ser pago pelo consumidor; a relação entre a medida de massa e a medida de volume de uma substância sob uma medida de pressão constante.

Além da sala de aula (p. 45)

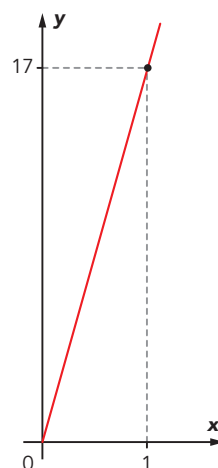
- Considerando os pontos (4, 68) e (5, 85), temos:

$$a = \frac{85 - 68}{5 - 4} = 17$$

$$f(5) = 85 \Rightarrow 17 \cdot 5 + b = 85 \Rightarrow b = 85 - 85 \Rightarrow b = 0$$

Logo, a lei da função é $f(x) = 17x$.

-



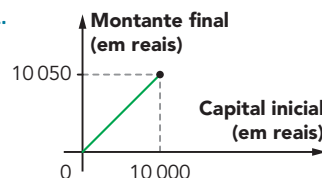
WYM Design/Arquivo da editora

- A medida de comprimento aproximada do palmo do artesão, em centímetros.
- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal. Exemplos de resposta: preço de uma mercadoria vendida de acordo com a medida de massa; medida de volume de produto de limpeza necessário para limpar uma superfície; lucro de um estabelecimento com relação à quantidade de produtos vendida; quantidade de sacos de cimento para uma construção; quantidade de linha para produzir uma peça de roupa.

Atividades

- $f(x) = 50x$
 - Sim, pois é da forma $f(x) = ax$.
 - Sim, pois a relação entre número de livros vendidos e receita total é dada por uma função linear.
 - Não. Pois, por exemplo, o lucro na venda de 10 livros é de R\$ 300,00 ($L(10) = 300$), mas, dobrando o número de livros vendidos, obtém-se um lucro de R\$ 800,00 ($L(20) = 800$), que não é o dobro de R\$ 300,00.

-



WYM Design/Arquivo da editora

52. a) Como $0 \leq P \leq 1$ e $0 \leq N \leq 10$, então, $0 \leq N \cdot P \leq 10$. Portanto, o domínio é o intervalo $[0, 10]$.
- b) Sim, pois a relação entre Ideb e N é dada pela lei $\text{Ideb} = P \cdot N$ e, mantendo P constante, essa relação se torna uma função linear.
- c) $6,5 \cdot 0,55 = 3,575$
O Ideb é 3,575.
- d) $7,5 \cdot 0,55 = 4,125$. A escola não alcançará a meta.

$$N \cdot 0,55 = 6,0 \Rightarrow N = \frac{6}{0,55} \Rightarrow N \approx 10,91$$

Como N é padronizado entre 0 e 10, é impossível obter $N \approx 10,91$. Portanto, é impossível a escola alcançar a meta mantendo a taxa de aprovação em 55%.

- e) Exemplo de resposta: Se o Ideb fosse apenas o subíndice N , então ele seria a média das notas de Língua Portuguesa e de Matemática, ignorando a taxa de aprovação. Dessa maneira, uma unidade escolar pode ter alto Ideb, mas ter baixa taxa de aprovação, o que significa que poucos estudantes concluem a etapa de ensino no período ideal. De maneira análoga, se o Ideb fosse apenas o subíndice P , uma unidade escolar poderia ter Ideb alto (se tivesse alta taxa de aprovação), mas ter notas médias irrisórias, o que significa que os estudantes são aprovados, mas com baixo aproveitamento.

53. Resposta pessoal.

Refleta (p. 50)

- b) $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$.
c) $f(8) = 8 - 8 = 0$.

Refleta (p. 51)

- Para $x > \frac{5}{2}$ temos $f(x) > 0$, pois todos os pontos cujas coordenadas de x são maiores do que $\frac{5}{2}$ têm coordenadas de y maiores do que zero.
Para $x < \frac{5}{2}$ temos $f(x) < 0$, pois todos os pontos cujas coordenadas de x são menores do que $\frac{5}{2}$ têm coordenadas de y menores do que zero.
- A intersecção do gráfico da função constante nula (cuja lei é da forma $f(x) = 0$), com o eixo x , é o próprio gráfico da função, pois todo ponto do gráfico é da forma $(x, f(x)) = (x, 0)$. Isso condiz com o fato de que todo número real é zero dessa função.
Já o gráfico da função constante não nula (cuja lei é da forma $f(x) = k$, sendo k um número real não nulo) não intersecta o eixo x , pois todo ponto desse gráfico é da forma $(x, f(x)) = (x, k)$. Isso condiz com o fato de que nenhum número real é zero dessa função.

Refleta (p. 51)

O sinal $+$ significa $f(x) > 0$, e o sinal $-$ significa $f(x) < 0$.

Refleta (p. 52)

Porque a inequação trata de número de maçãs que, necessariamente, deve ser um número natural.

Atividades

54. a) $3 - 4x > x - 7 \Rightarrow 3 + 7 > x + 4x \Rightarrow 10 > 5x \Rightarrow x < 2$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
- b) $\frac{x}{4} - \frac{3(x-1)}{10} \leq 1 \Rightarrow \frac{10x - 12x + 12}{40} \leq \frac{40}{40} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -2x \leq 40 - 12 \Rightarrow -x \leq 14 \Rightarrow x \geq -14$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -14\}$
55. a) $f(x) = 5x - 230$, pois 5 é o valor de cada unidade e 230 é a despesa inicial.
- b) Para $f(x) < 0 \Rightarrow 5x - 230 < 0 \Rightarrow 5x < 230 \Rightarrow x < 46$.
O comerciante terá prejuízo se vender menos de 46 unidades.
- c) Para $f(x) = 315 \Rightarrow 5x - 230 = 315 \Rightarrow 5x = 545 \Rightarrow x = 109$.
O número de unidades x deve ser igual a 109.
- d) Para $f(x) > 280 \Rightarrow 5x - 230 > 280 \Rightarrow 5x > 510 \Rightarrow x > 102$.
O número de unidades x deve ser maior do que 102.
- e) Para $100 < f(x) < 180 \Rightarrow 100 < 5x - 230 < 180 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 20 < x - 46 < 36 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 20 + 46 < x - 46 + 46 < 36 + 46 \Rightarrow 66 < x < 82$.
O número de unidades x deve ser maior do que 66 e menor do que 82.
56. a) Pelo enunciado, o valor da inscrição corresponde ao valor inicial da função e o valor de cada consulta corresponde à taxa de variação. Assim, temos:
Plano A: $f(x) = 50x + 100$; plano B: $g(x) = 40x + 180$.
- b) O plano A, o que significa que o custo aumenta mais rapidamente no plano A.
- c) Para que o plano A seja mais econômico, devemos ter:
 $f(x) < g(x) \Rightarrow 50x + 100 < 40x + 180 \Rightarrow 10x < 80 \Rightarrow x < 8$
Para que o plano B seja mais econômico, devemos ter:
 $f(x) > g(x) \Rightarrow 50x + 100 > 40x + 180 \Rightarrow 10x > 80 \Rightarrow x > 8$
Para que os dois planos sejam equivalentes, devemos ter:
 $f(x) = g(x) \Rightarrow 50x + 100 = 40x + 180 \Rightarrow 10x = 80 \Rightarrow x = 8$
Assim, plano A é mais econômico para $x < 8$; o plano B, para $x > 8$; e eles são equivalentes para $x = 8$.
57. Considerando x a quantidade de minutos, as funções que dão o custo de cada plano, em reais, são dadas pelas seguintes leis:
 $A(x) = 0,5x + 35$
 $B(x) = 0,8x + 20$
 $C(x) = 1,2x$
- a) Para $x = 25$, temos:
 $A(x) = 0,5x + 35 \Rightarrow A(25) = 0,5 \cdot 25 + 35 \Rightarrow 12,5 + 35 = 47,5$
 $B(x) = 0,8x + 20 \Rightarrow B(25) = 0,8 \cdot 25 + 20 \Rightarrow 20 + 20 = 40$
 $C(x) = 1,2x \Rightarrow C(25) = 1,2 \cdot 25 \Rightarrow 30$
O plano mais vantajoso é o plano C.
- b) $A(x) < B(x) \Rightarrow 0,5x + 35 < 0,8x + 20 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 35 - 20 < 0,8x - 0,5x \Rightarrow 15 < 0,3x \Rightarrow x > 50$
 $A(x) < C(x) \Rightarrow 0,5x + 35 < 1,2x \Rightarrow 35 < 1,2x - 0,5x \Rightarrow$
 $\Rightarrow 35 < 0,7x \Rightarrow x > 50$
A partir de 50 minutos, o plano A é mais vantajoso do que os planos B e C.
58. Considerando a a quantidade de minutos, as funções para cada plano são dadas pelas seguintes leis:
 $X(a) = 35 + 0,5a$
 $Y(a) = 26 + 0,65a$
Para $X(a) < Y(a) \Rightarrow 35 + 0,5a < 26 + 0,65a \Rightarrow 9 < 0,15a \Rightarrow$
 $\Rightarrow a > 60$.
A partir de 60 minutos.
59. O número de trufas é x .
O lucro é dado por $L = 1,5x - (1500 + 0,5x) = x - 1500$.
Para $L \leq 0$, temos $x - 1500 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1500$.

60. Considerando que t é o número de meses de produção, as funções que indicam a produção de calçados das empresas **A** e **B** são dadas, respectivamente, pelas seguintes leis:

$$a(t) = 3000 + 70t$$

$$b(t) = 1100 + 290t$$

$$\text{Para } a(t) < b(t), \text{ temos } 3000 + 70t < 1100 + 290t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1900 < 220t \Rightarrow t > \frac{1900}{220} \approx 8,63.$$

Após aproximadamente 8,63 meses, a produção de **B** superará a produção de **A**. Isso deve ocorrer no 9º mês, isto é, em setembro.

Alternativa **d**.

Conexões (p. 54)

1. No edifício sustentável de Pearce, é interessante manter a medida de temperatura agradável durante o dia, ou seja, evitar que a medida de temperatura maior do ambiente externo durante o dia aqueça o interior do prédio. Então, é necessário escolher um material com maior capacidade térmica para que a variação de medida de temperatura seja menor.
2. No edifício sustentável de Pearce, para o qual é interessante escolher um material com maior capacidade térmica, conforme concluído na atividade 1, o ideal é utilizar um material que tenha maior calor específico, uma vez que C e c são proporcionais, segundo a relação dada. Logo, como o calor específico do concreto (1,00 J/kg·K, dado no texto) é maior que o da cerâmica, é melhor usar blocos de concreto na estrutura.
3. Exemplos de resposta: O velcro (que copia a maneira como os carrapichos grudam na roupa), a lâmpada de LED (que imita a anatomia dos vagalumes), o ornitóptero (avião de Leonardo da Vinci inspirado no mecanismo de voo dos morcegos) e o trem-bala japonês (que se baseia no comportamento da ave pescador-rei).
4. Exemplos de resposta: O Council House 2, em Melbourne, Austrália, com placas de madeira móveis nas laterais e painéis fotovoltaicos instalados no teto; e o Votu Hotel, em Maraú, Bahia, que tem janelas e portas posicionadas de forma estratégica para aproveitar a ventilação natural, além de uma laje de jardim para reduzir o aumento da medida de temperatura interna.
O edifício comercial Bullitt Center, em Seattle, nos Estados Unidos, conta com painéis solares instalados por todo o telhado que fornecem a energia elétrica necessária para o consumo no próprio prédio, imensas janelas com abertura automática que garantem o uso da luz natural, poços geotérmicos para suprir um sistema de aquecimento, sistema de compostagem e uma cisterna que armazena água da chuva. O aeroporto de Oslo, na Noruega, é coberto por painéis de carvalho noruegueses, tem uma claraboia de 300 metros e janelas panorâmicas curvas e conta com um depósito térmico de neve coletada no inverno para resfriar o ambiente durante o verão.
É importante observar que os principais pontos que tornam uma construção sustentável são: a eficiência energética, ou seja, a garantia de que a fonte de energia elétrica é limpa e de baixo impacto ambiental, como a obtida com o uso de painéis fotovoltaicos e aquecedores solares; a gestão da água, com a implantação de sistemas de racionamento e reaproveitamento da água da chuva; o uso de materiais ecológicos; e o cuidado com a destinação de resíduos, como os restos dos materiais da obra, de forma a causar o menor impacto ao meio ambiente. A relação custo-benefício para a instalação e a manutenção dessas medidas deve

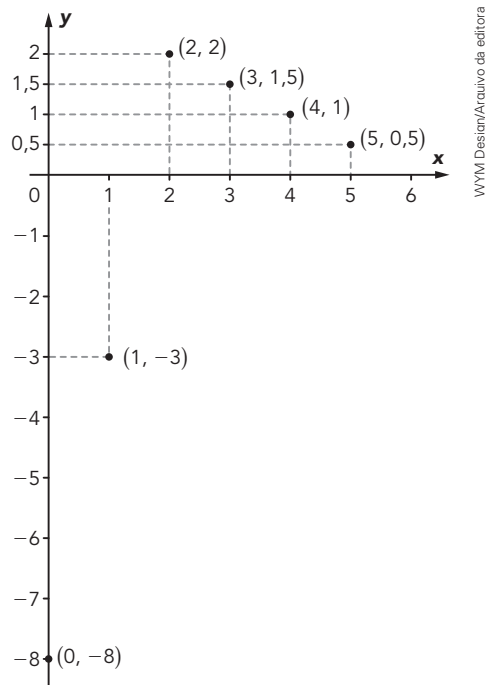
ser analisada a longo prazo, considerando, por exemplo, a economia nos custos com energia elétrica.

Situações (p. 57)

1. a) Suponha que essa relação é uma função afim. Sendo S o rendimento mensal, em reais, e P a alíquota, a função afim é dada por $P(S) = aS + b$.
Usando os valores $S_1 = 2000$ e $P_1 = 0,075$, e $S_2 = 3000$ e $P_2 = 0,15$, temos $a = \frac{0,15 - 0,075}{3000 - 2000} = \frac{3}{40000}$, logo $b = -0,075$. Portanto, $S(P) = \frac{3}{40000} S - 0,075$.
No entanto, $P(5000) = \frac{3}{40000} \cdot 5000 - 0,075 = 0,3 = 30\% \neq 27,5\%$.
Logo, a relação entre os rendimentos mensais de uma pessoa e a alíquota não é uma função afim.
- b) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Os recursos arrecadados com o imposto de renda são destinados a diferentes setores do país, como educação, segurança e saúde.
2. a) $10 \cdot 3,9860 + 8 \cdot 7,7260 \approx 101,67$
A tarifa é R\$ 101,67.
- b) Seja t a tarifa e c o consumo, considerando apenas os valores inteiros de c , temos:
Para $0 \leq c \leq 10$: $t(c) = 3,9860 \cdot c$.
Para $11 \leq c \leq 20$: $t(c) = 3,9860 \cdot 10 + 7,7260 \cdot (c - 10) \Rightarrow$
 $t(c) = 39,86 - 77,26 + 7,7260 \cdot c \Rightarrow$
 $t(c) = -37,40 + 7,7260 \cdot c$.

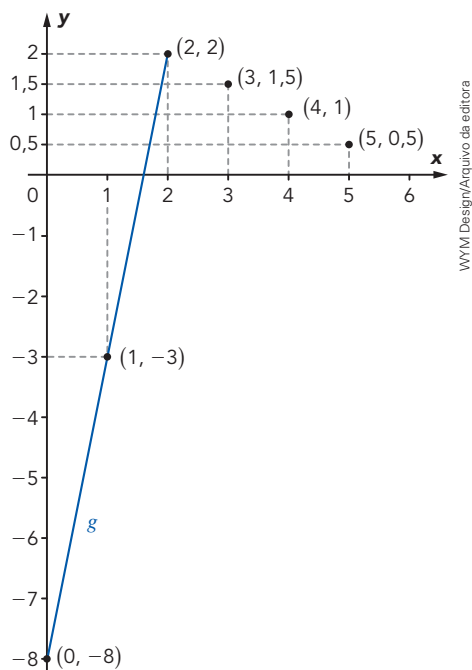
Explore para descobrir (p. 58)

- a) Esses pontos estão representados no plano cartesiano a seguir.



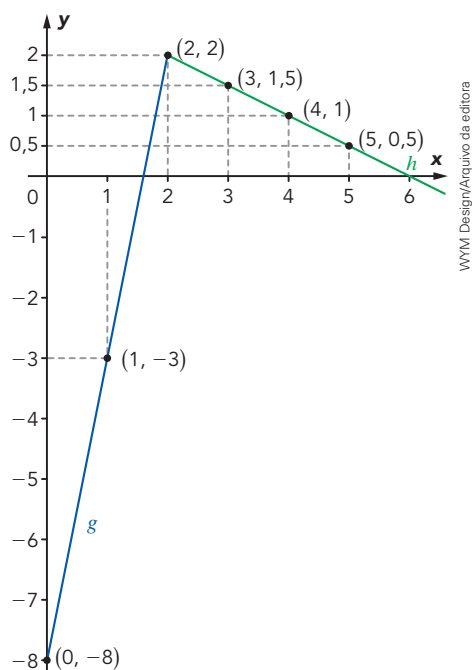
A função f não pode ser uma função afim, pois os pontos representados no plano cartesiano não são colineares (isto é, não pertencem a uma mesma reta).

- b) Sim, pois, pelo enunciado, $g(0) = -8$; $g(1) = -3$ e $g(2) = 2$. Logo, os pontos $(0, -8)$, $(1, -3)$, $(2, 2)$ pertencem ao gráfico de g . Como esses pontos são colineares, apenas com as informações dadas, não há restrição para a possibilidade de g ser uma função afim.
- c) O gráfico de g está representado a seguir.



A lei de g é $g(x) = 5x - 8$.

- d) Sim, pois, pelo enunciado, $h(2) = 2$; $h(3) = 1,5$, $h(4) = 1$ e $h(5) = 0,5$. Logo, os pontos $(2, 2)$, $(3, 1,5)$, $(4, 1)$ e $(5, 0,5)$ pertencem ao gráfico de h . Como esses pontos são colineares, apenas com as informações dadas, não há restrição para a possibilidade de h ser uma função afim.
- e) O gráfico de h está representado a seguir.



A lei de h é $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

- f) Podemos interpretar a união dos gráficos de g e h como o gráfico de f . E $f(x)$ pode ser expressa como sendo igual a $g(x)$, se $x \leq 2$, e igual a $h(x)$, se $x \geq 2$.

Atividades

61. a) $f(0) = 4 \cdot 0 + 5 = 5$
 b) $f(-1) = 4 \cdot (-1) + 5 = 1$
 c) $f(1) = 4 \cdot 1 + 5 = 9$
 d) $f(5) = 9$
 e) $f(10) = -10 + 14 = 4$
 f) $f(6) = 9$
62. a) Para $x \leq 3$, o gráfico da função f é uma semirreta que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$; portanto, sua lei é dada por $1 - x$.
 Para $x > 3$, o gráfico da função f é uma semirreta que passa pelos pontos $(4, 3)$ e $(5, 4)$; portanto, sua lei é dada por $x - 1$.
- Portanto, $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 3 \\ x - 1, & \text{se } x > 3 \end{cases}$
- b) Para $x < 1$, o gráfico da função f é uma semirreta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, -1)$; portanto, sua lei é dada por $-2x + 1$.
 Para $1 \leq x \leq 5$, o gráfico da função f é um segmento de reta que passa pelos pontos $(1, -1)$ e $(5, 3)$; portanto, sua lei é dada por $x - 2$.
 Para $x > 5$, o gráfico da função f é uma semirreta horizontal que passa pelo ponto $(5, 3)$; portanto, sua lei é a lei da função constante de valor igual a 3.
- Portanto, $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{se } x < 1 \\ x - 2, & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ 3, & \text{se } x > 5 \end{cases}$

63. Seja t a tarifa a pagar, em reais, e c o consumo de água, em m^3 .
 Se $c \leq 10$, $t(c) = 23,57$.
 Se $11 \leq c \leq 20$, $t(c) = 23,57 + 6,6 \cdot (c - 10) = -42,43 + 6,6c$.
 Se $21 \leq c \leq 50$, $t(c) = 23,57 + 6,6 \cdot 10 + 11,69(c - 20) = -144,23 + 11,69c$.
 Se $c > 50$, $t(c) = 23,57 + 6,6 \cdot 10 + 11,69 \cdot 30 + 12,27(c - 50) = -173,23 + 12,27c$.

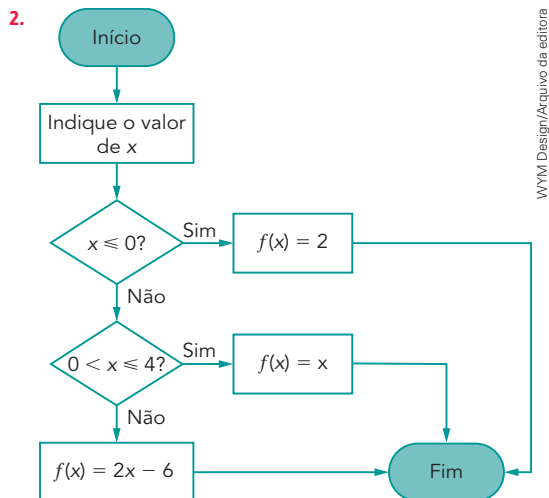
$$t(c) = \begin{cases} 23,57, & \text{se } c \leq 10 \\ -42,43 + 6,6c, & \text{se } 11 \leq c \leq 20 \\ -144,23 + 11,69c, & \text{se } 21 \leq c \leq 50 \\ -173,23 + 12,27c, & \text{se } c > 50 \end{cases}$$

Tecnologias digitais (p. 63)

- Resposta pessoal.
- $-6x - 9$ é decrescente, pois $a = -6 < 0$.
 $x - 2$ é crescente, pois $a = 1 > 0$.
 4 é constante, pois $a = 0$.
- $k(x) = \begin{cases} \text{se}(x < 0, 2x + 4, & \text{se}(x \geq 0, -x + 4)) \end{cases}$

Além da sala de aula (p. 65)

1. $f(x) = \begin{cases} \text{se}(x \leq 0, 2, \\ \text{se}(0 < x \leq 4, x, \\ \text{se}(x > 4, 2x - 6)) \end{cases}$

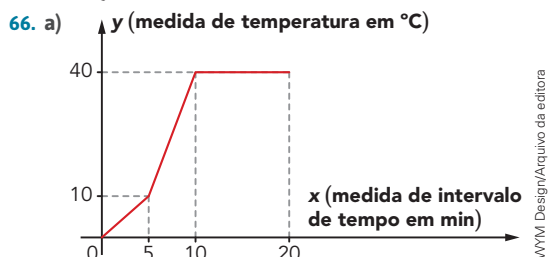


Atividades

64. a) Entre 20 min e 50 min a substância está entre sólido e líquido. Isso ocorre por 30 minutos. A afirmação está incorreta.
 b) O ponto de ebulição é alcançado quando a medida de temperatura atinge os 90 °C. A afirmação está incorreta.
 c) O intervalo de tempo em que a substância está somente no estado líquido inicia nos 50 min e termina nos 60 min. A medida desse intervalo é 10 min. A afirmação está correta.
 d) O ponto de fusão dessa substância ocorre quando a medida de temperatura chega a 30 °C. A afirmação está incorreta.
 e) Entre 50 min e 60 min temos uma função afim definida por $f: [50, 60] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 6t - 270$. A afirmação está incorreta.

Alternativa c.

65. a) Após a reforma, o aumento na capacidade de torcedores foi 35 mil - 27 mil = 8 mil. A afirmação é falsa.
 b) Se x ($x \leq 35000$) torcedores turistas forem ao estádio, a renda bruta y gerada pelos turistas será dada por $y = 105x$ em reais. A afirmação é verdadeira.
 c) $35000 \cdot 69 = 2415000$. Se o estádio estiver com todos os assentos ocupados por russos, a renda dessa partida será igual a R\$ 2.415.000. A afirmação é verdadeira.
 d) $\frac{5}{7} \cdot 105 \cdot 35000 = 2625000$
 $\frac{2}{7} \cdot 69 \cdot 35000 = 690000$
 $2625000 + 690000 = 3315000$
 Na partida descrita a renda será de R\$ 3.315.000,00. A afirmação é verdadeira.



- b) No intervalo $0 \leq x \leq 5$, temos $y = ax$.

Para $x = 5 \Rightarrow y = 10$, então, $10 = 5a \Rightarrow a = 2$; logo, $y = 2x$.

No intervalo $5 \leq x \leq 10$, temos $y = ax + b$.

Para $x = 5 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow y = a \cdot 5 + b \Rightarrow 5a + b = 10$ e para $x = 10 \Rightarrow y = 40 \Rightarrow 40 = a \cdot 10 + b \Rightarrow 10a + b = 40$. Assim, teremos o sistema:

$$\begin{cases} 5a + b = 10 \\ 10a + b = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a - b = -10 \\ 10a + b = 40 \end{cases} \text{ Somando as equações membro a membro:}$$

$5a = 30 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = -20$. Logo, temos $y = 6x - 20$.

No intervalo $10 \leq x \leq 20$, teremos $y = 40$.

$$\text{A lei da função é } y = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ 6x - 20, & \text{se } 5 \leq x \leq 10 \\ 40, & \text{se } 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

c) $x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 4$

$x = 8 \Rightarrow y = 6 \cdot 8 - 20 \Rightarrow y = 28$

$x = 12 \Rightarrow y = 40$

Aos 2 minutos, a medida de temperatura era de 4 °C; aos 8 minutos, era de 28 °C; e, aos 12 minutos, era de 40 °C.

- d) Em $[0, 5]$, pois, se a medida de intervalo de tempo x , em minutos, é tal que $x \in [0, 5]$, então a medida de temperatura t , em graus Celsius, e a medida de intervalo de tempo decorrida x estão relacionadas por uma função linear de lei $t(x) = 2x$.

67. a) 3 horas, entre 2 h e 5 h.

- b) 3 horas. Entre 0 h e 1 h e entre 4 h e 6 h.

- c) Seja t a medida de intervalo de tempo, em horas. Para $3 \leq t \leq 4$, a medida de intensidade sonora S em função de t é uma função afim, pois o gráfico do enunciado mostra que o gráfico de S é um segmento de reta.

Se $S(t) = at + b$, então:

• $100 = a \cdot 3 + b \Rightarrow 3a + b = 100$

• $120 = a \cdot 4 + b \Rightarrow 4a + b = 120$

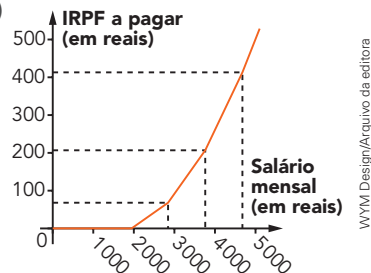
Subtraindo essas duas equações, temos $a = 20$, então $b = 120 - 4 \cdot 20 = 40$. Portanto, $S(t) = 20t + 40$.

Como 3 h 15 min = 3,25 h, temos:

$S(3,25) = 20 \cdot 3,25 + 40 = 105$

Portanto, a medida da intensidade sonora é 105 dB.

68. a)



- b) A função f é constante no intervalo $0 < x \leq 1903,98$ e é crescente no intervalo $x \geq 1903,99$.

- c) Para que os contribuintes de menor renda paguem valores menores de IRPF em relação ao salário bruto.

69. a) $-3x + 15 = 0 \Rightarrow x = 5$

$x < 5 \Rightarrow f(x) = -3x + 15$

$x \geq 5 \Rightarrow f(x) = -(-3x + 15) = 3x - 15$

Então, $f(x) = \begin{cases} -3x + 15, & \text{se } x < 5 \\ 3x - 15, & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$

b) $f(2) = -3 \cdot 2 + 15 = 9$

$f(7) = 3 \cdot 7 - 15 = 6$

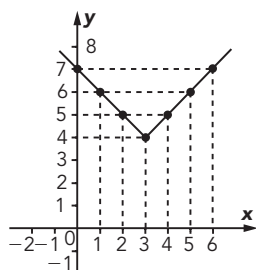
$f(-1) = -3 \cdot (-1) + 15 = 18$

$f(5) = 3 \cdot 5 - 15 = 0$

70. a) $f(8) = |3 - 8| + 4 = 9$
 $f(-1) = |3 + 1| + 4 = 8$
 $f(3) = |3 - 3| + 4 = 4$
 $f(0) = |3 - 0| + 4 = 7$
 b) $x < 3 \Rightarrow f(x) = 3 - x + 4 = 7 - x$
 $x \geq 3 \Rightarrow f(x) = -3 + x + 4 = x + 1$

Então, $f(x) = \begin{cases} 7 - x, & \text{se } x < 3 \\ x + 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

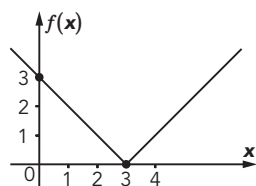
c)



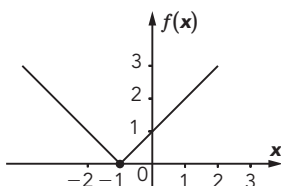
d) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$.

71. $f(x)$ é crescente para $x > 0$; $f(x)$ é decrescente para $x < 0$.

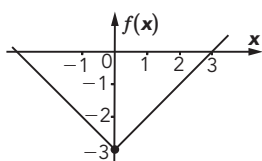
72. a) $f(x) = |x - 3|$



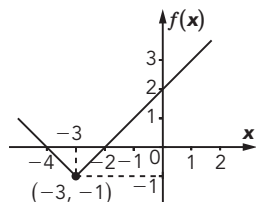
b) $f(x) = |x + 1|$



c) $f(x) = |x| - 3$



d) $f(x) = |x + 3| - 1$



73. Resolvendo $100 - 5x \geq 0$, temos $x \leq 20$.

Portanto: $f(x) = \begin{cases} 500 + (100 - 5x), & \text{se } 1 \leq x \leq 20 \\ 500 + (-100 + 5x), & \text{se } 20 < x \leq 30 \end{cases}$

Logo, a função é decrescente para $1 \leq x \leq 20$, e o máximo no trecho ocorre em $x = 1$ (menor valor de x): $f(1) = 500 + |100 - 5 \cdot 1| = 500 + 95 = 595$.

A função é crescente para $20 < x \leq 30$, e o máximo no trecho ocorre em $x = 30$ (maior x):

$$f(30) = 500 + |100 - 5 \cdot 30| = 500 + 50 = 550$$

Ou seja, o maior número de pessoas ocorre no primeiro dia de cada mês.

Alternativa **a**.

Vestibulares e Enem (p. 71)

1. $f(3) = 40 \cdot 3 + 200 = 320$

$$f(9) = 40 \cdot 9 + 200 = 560$$

$$560 - 320 = 240$$

$$p = \frac{240}{320} = 0,75 = 75\%$$

O aumento é de 75%.

Alternativa **c**.

2. $R(c) = \frac{4}{5} \cdot 3c - 5 = 19 \Rightarrow 12c = 24 \cdot 5 \Rightarrow c = 10$

A quantidade de catadores é 10.

Alternativa **d**.

3. A lei da função é dada por $T(t) = at + b$, com t em minutos e T em celsius.

No momento da medicação, considerando o horário 9 h 25 min como $t = 0$, então o horário 10 h 10 min corresponde a $t = 45$ e o horário 10 h 40 min corresponde a $t = 75$.

Portanto, temos então $T(0) = b$ e $a = \frac{38,7 - 38,1}{45 - 75} = \frac{0,6}{-30} = -0,02$.

$$38,7 = -0,02 \cdot 45 + b \Rightarrow b = 39,6$$

A medida de temperatura inicial é 39,6 °C.

Alternativa **05**.

4. No intervalo $0 \leq x \leq 2$, temos $f(x) = ax + b$.

$$a = \frac{k - 0}{2 - 0} = \frac{k}{2} \text{ e } b = 0. \text{ Logo } f(x) = \frac{k}{2}x.$$

No intervalo $2 < x \leq 5$, temos $f(x) = k$.

Portanto, $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ k, & \text{se } 2 < x \leq 5 \end{cases}$

Alternativa **a**.

5. O lucro é dado por: $L(x) = x \cdot 4 - (2,2x + 2500) = 1,8x - 2500$, em que x é o número de metros de tecido.

$$L(x) = 1,8x - 2500 > 0 \Rightarrow 1,8x > 2500 \Rightarrow x > \frac{2500}{1,8} = 1388,8$$

O número mínimo de metros de tecido é 1389.

Alternativa **b**.

6. Observando o gráfico, podemos concluir que, para 45 minutos por mês, o plano C apresenta menor custo do que os outros e, para 90 minutos, o plano B apresenta menor custo.

Logo, o plano C seria o melhor para a esposa e o plano B seria o melhor para o marido.

Alternativa **e**.

7. Seja X a quantidade de funcionários.

Então $X - 1$ é a quantidade de funcionários menos o gerente.

$$Y = 1000 + (X - 1) \cdot 80 \cdot 2 \Rightarrow Y = 160X + 840$$

Alternativa **d**.

8. Pelo enunciado, o crescimento observado no quadro é linear. Logo, a relação entre ano e número de médicos pode ser descrita como uma função afim.

Dos dados do quadro, a taxa de variação pode ser calculada por:

$$a = \frac{287 - 212}{2010 - 1995} = \frac{75}{15} = 5$$

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(2010) = 287 \Rightarrow 2010 \cdot 5 + b = 287 \Rightarrow b = -9763$$

$$f(2040) = 5 \cdot 2040 - 9763 = 437$$

A previsão é de 437 médicos.

Alternativa **c**.

9. Entre 2013 e 2015 a lei da função é dada por $f(x) = ax + b$.

$$a = \frac{59 - 67}{2015 - 2013} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$f(2015) = 59 \Rightarrow -4 \cdot 2015 + b = 59 \Rightarrow b = 8119$$

$$f(2014) = -4 \cdot 2014 + 8119 = 63$$

A cobertura dessa campanha teria sido de 63%.

Alternativa **b**.

10. A lei da função pode ser escrita como $f(x) = ax + b$.

$$a = \frac{30 - 10}{1 - 6} = \frac{20}{-5} = -4$$

$$f(1) = 30 \Rightarrow -4 \cdot 1 + b = 30 \Rightarrow b = 34$$

$$f(x) = -4x + 34$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow -4x + 34 = 0 \Rightarrow x = 8,5$$

Depois do sexto mês, precisa passar 2 meses e meio para que o reservatório atinja o nível zero.

Alternativa **a**.

11. Consumidor **X** precisa de 190 MB.

$$\text{Se contratar o plano A: } P_A = 29,9 + 0,4 \cdot 40 = 45,9$$

$$\text{Se contratar o plano B: } P_B = 34,9$$

$$\text{Se contratar o plano C: } P_C = 59,9$$

$$\text{Se contratar o plano D: } P_D = 89,9$$

$$\text{Se contratar o plano E: } P_E = 119,9$$

Logo, o consumidor **X** deve contratar o plano **B**.

Consumidor **Y** precisa de 450 MB.

$$\text{Se contratar o plano A: } P_A = 29,9 + 0,4 \cdot 300 = 149,9$$

$$\text{Se contratar o plano B: } P_B = 34,9 + 0,1 \cdot 200 = 54,9$$

$$\text{Se contratar o plano C: } P_C = 59,9$$

$$\text{Se contratar o plano D: } P_D = 89,9$$

$$\text{Se contratar o plano E: } P_E = 119,9$$

Logo, o consumidor **Y** deve contratar o plano **B**.

Consumidor **Z** precisa de 890 MB.

$$\text{Se contratar o plano A: } P_A = 29,9 + 0,4 \cdot 740 = 325,9$$

$$\text{Se contratar o plano B: } P_B = 34,9 + 0,1 \cdot 640 = 98,9$$

$$\text{Se contratar o plano C: } P_C = 59,9 + 0,1 \cdot 390 = 98,9$$

$$\text{Se contratar o plano D: } P_D = 89,9$$

$$\text{Se contratar o plano E: } P_E = 119,9$$

Logo, o consumidor **Z** deve contratar o plano **D**.

Os consumidores **X**, **Y** e **Z** devem contratar os planos **B**, **B** e **D**, respectivamente.

Alternativa **c**.

12. Pelo gráfico, $f(3) = f(4) = 1$.

O quadro a seguir apresenta os valores das funções de cada uma das alternativas para $x = 3$ e $x = 4$.

	$x = 3$	$x = 4$
$ x + x + 7 $	$ 3 + 3 + 7 = 13$	$ 4 + 4 + 7 = 15$
$ 3 - x + x - 4 $	$ 3 - 3 + 3 - 4 = 1$	$ 3 - 4 + 4 - 4 = 1$
$- x + x - 7 $	$- 3 + 3 - 7 = 1$	$- 4 + 4 - 7 = -1$
$ x + 2 + x + 5 $	$ 3 + 2 + 3 + 5 = 13$	$ 4 + 2 + 4 + 5 = 15$
$ x + 9 - 3x + 2 $	$ 3 + 9 - 3 \cdot 3 + 2 = 1$	$ 4 + 9 - 3 \cdot 4 + 2 = -1$

Do quadro, apenas a alternativa **b** apresenta $f(3) = f(4) = 1$.

Alternativa **b**.

13. Uma vez que o coeficiente angular das funções afins não é o mesmo, o reservatório terá vazão constante quando as vazões dos 2 reservatórios forem constantes ao mesmo tempo.

Torneira: tem vazão constante no intervalo 0 a 10 min e no intervalo 15 a 20 min.

Ralo: tem vazão constante no intervalo 5 a 15 min e no intervalo 20 a 25 min.

Logo, a intersecção dos 2 é no intervalo de 5 a 10 min.

Alternativa **b**.

14. Sendo x o valor total de vendas feito pelo trabalhador durante o mês, o salário é dado por $f(x) = 0,06x + 1300$.
Alternativa **a**.
15. Considere a tabela a seguir.

Gasto com estacionamento por tempo nos estacionamentos A, B e C

Tempo (em h)	Valor pago em A (em reais)	Valor pago em B (em reais)	Valor pago em C (em reais)
1	5	4	6
2	8	8	8
3	11	12	10
4	14	16	12

Fonte: Dados do enunciado.

Pela tabela, é possível verificar que a opção **d** é a correta.

Alternativa **d**.

16. $L(y) = 4 \cdot 40200 \Rightarrow L(y) = 160800 \Rightarrow 8y + 200 = 160800 \Rightarrow 8y = 160600 \Rightarrow y = 20075$.
Portanto, o investimento deverá ser de R\$ 20.075,00.
Alternativa **d**.

Capítulo 2: Função quadrática

Abertura

a) $x = 0$

b) $x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{7} \cdot 0^2 + \frac{8}{7} \cdot 0 + 2 \Rightarrow y = 2$

A medida de comprimento de altura é 2 m.

c) Para $x = 2 \Rightarrow y = \frac{-1}{7} \cdot 2^2 + \frac{8}{7} \cdot 2 + 2 = \frac{-4}{7} + \frac{16}{7} + 2 = \frac{-4 + 16 + 14}{7} = \frac{26}{7} \approx 3,71$.

Terá atingido a medida de comprimento de altura aproximada de 3,71 m.

d) Para $y = 3 \Rightarrow 3 = \frac{-1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x + 2 \Rightarrow 21 = -x^2 + 8x + 14 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 7) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 7$.

1 m na subida e 7 m na descida da bola.

- e) Pela equação e pela imagem, a bola atinge a medida de comprimento de altura de 3 metros quando $x_1 = 1$ m (subida) e quando $x_2 = 7$ m (descida). Pela imagem, observa-se que a cesta ocorre na descida e, portanto, o arremesso valeu 3 pontos, pois $x_2 = 7 \Rightarrow \Rightarrow x_2 > 6,75$ m.

Situações (p. 78)

1. a) Receita em função do desconto no preço do bolo

Desconto (em R\$)	Preço do bolo (em R\$)	Quantidade de bolos vendidos	Receita (em R\$)
0,00	60,00	$12 + 0 = 12$	$12 \cdot 60 = 720,00$
5,00	55,00	$12 + 2 = 14$	$14 \cdot 55 = 770,00$
10,00	50,00	$12 + 4 = 16$	$16 \cdot 50 = 800,00$
15,00	45,00	$12 + 6 = 18$	$18 \cdot 45 = 810,00$
20,00	40,00	$12 + 8 = 20$	$20 \cdot 40 = 800,00$
25,00	35,00	$12 + 10 = 22$	$22 \cdot 35 = 770,00$
30,00	30,00	$12 + 12 = 24$	$24 \cdot 30 = 720,00$
40,00	20,00	$12 + 16 = 28$	$28 \cdot 20 = 560,00$
50,00	10,00	$12 + 20 = 32$	$32 \cdot 10 = 320,00$
5x	$60 - 5x$	$12 + 2x$	$(12 + 2x) \cdot (60 - 5x) = -10x^2 + 60x + 720$

Tabela elaborada para fins didáticos.

- b) Até um desconto de R\$ 15,00, conforme o desconto aumenta, a receita também aumenta. A partir de R\$ 15,00, quanto mais o desconto aumenta, mais a receita diminui.
- c) Sim. R\$ 810,00.
- d) $-10x^2 + 60x + 720$
2. a) 1ª opção: $10 \text{ m} \times 90 \text{ m} = 900 \text{ m}^2$
 2ª opção: $20 \text{ m} \times 80 \text{ m} = 1600 \text{ m}^2$
 3ª opção: $30 \text{ m} \times 70 \text{ m} = 2100 \text{ m}^2$
 A opção que proporciona a maior medida de área é a 3ª opção. A 3ª opção mede 2100 m^2 .
- b) Sim. No retângulo de dimensões com medidas de comprimento de 50 m e 50 m. A medida de área máxima é $50 \text{ m} \times 50 \text{ m} = 2500 \text{ m}^2$.
- c) Quadrado.
3. a) Considerando x o desconto no preço do litro da gasolina em centavos, temos: $4 + 0,01x$.
- b) $10000 - 100x$.
- c) $f(x) = (4 + 0,01x) \cdot (10000 - 100x) \Rightarrow f(x) = -x^2 - 300x + 40000$

Explore para descobrir (p. 80)

1. a) Nenhuma. c) 5 diagonais.
 b) 2 diagonais. d) 9 diagonais.
2. a) Nenhuma.
 b) 1 diagonal.
 c) 2 diagonais.
 d) 3 diagonais.
 e) $(n - 3)$ diagonais.
3. Não. Resposta esperada: O produto $n \cdot (n - 3)$ fornece o dobro do número de diagonais do polígono, pois, nesse cálculo, cada diagonal está sendo considerada 2 vezes. Por isso, a expressão correta para obter o número de diagonais de um polígono de n lados é $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.
4. $d(3) = 0$, $d(4) = 2$, $d(5) = 5$ e $d(6) = 9$. Espera-se que o estudante perceba que, como $d(n)$ não tem uma variação linear, d não é uma função afim.

Reflita (p. 81)

Devido ao expoente 2 do x , ou seja, x está elevado ao quadrado.

Reflita (p. 81)

Porque não podem ser escritas na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Atividades

1. Resposta pessoal.
2. a) $f(x) = 2x^2$
 b) $f(x) = 2x + 1$
 c) $f(x) = x(x - 1)(x - 2) = x(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$
 d) $f(x) = 3x(x - 1) = 3x^2 - 3x$
 As dos itens **a** e **d**.
3. a) Para t real e diferente de zero.
 b) Para $t = 2$.
4. a) $a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$
 b) $f(x) = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 23$
 $a = 2$, $b = -12$ e $c = 23$
 c) $f(x) = x^2 - x - 6$
 $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$
 d) $f(x) = 12x^2 + 13x - 14$
 $a = 12$, $b = 13$ e $c = -14$
 e) $f(x) = 10x^2 + 13x - 3$
 $a = 10$, $b = 13$ e $c = -3$

Refleta (p. 82)

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$

Portanto, 2 e 3 são raízes da equação.

Atividades

5. a) $f(x) = -2 \cdot (0)^2 = 0$
 $f(x) = -2 \cdot (1)^2 = -2$
 $f(x) = -2 \cdot (2)^2 = -8$
 $f(x) = -2 \cdot (3)^2 = -18$
 $f(x) = -2 \cdot (4)^2 = -32$
 $f(x) = -2 \cdot (5)^2 = -50$

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0	-2	-8	-18	-32	-50

- b) $f(x) = 3 \cdot (0)^2 - 5 \cdot 0 = 0$
 $f(x) = 3 \cdot (1)^2 - 5 \cdot 1 = -2$
 $f(x) = 3 \cdot (2)^2 - 5 \cdot 2 = 2$
 $f(x) = 3 \cdot (3)^2 - 5 \cdot 3 = 12$
 $f(x) = 3 \cdot (4)^2 - 5 \cdot 4 = 28$
 $f(x) = 3 \cdot (5)^2 - 5 \cdot 5 = 50$

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0	-2	2	12	28	50

6. a) $A(10) = 10^2 = 100$
 $A(1,5) = 1,5^2 = 2,25$
 $A(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^2 = 12$
b) $A(\ell) = 256 \Rightarrow \ell^2 = 256 \Rightarrow \ell = 16$
7. a)

Algoritmo	Cálculos correspondentes
Início Nomeie de r a medida de comprimento do raio	$r = 5$
Crie R Calcule $R \leftarrow r \cdot r$	$R = r \cdot r = 5 \cdot 5 = 25$
Crie A Calcule $A \leftarrow \pi \cdot R$	$A = \pi \cdot r = 25\pi$
Saída: A Fim	Saída: 25π

A medida de área é $25\pi \text{ cm}^2$.

- b) Exemplo de resposta:

Início Nomeie de A a medida de área de um círculo Crie $R \leftarrow \frac{A}{\pi}$ Crie $r \leftarrow \sqrt{R}$ Saída: r Fim
--

c)

Algoritmo	Cálculos correspondentes
Início	
Nomeie de A a medida de área de um círculo	$A = 64\pi$
Crie R	
Calcule $R \leftarrow \frac{A}{\pi}$	$R = \frac{A}{\pi} = \frac{64\pi}{\pi} = 64$
Crie r	
Calcule $C \leftarrow \sqrt{R}$	$C = \sqrt{R} = \sqrt{64} = 8$
Saída: r	Saída: 8
Fim	

A medida de comprimento do raio é 8 m.

8. a) $f(x) = \frac{(6+x)(x+2)}{2} = \frac{x^2}{2} + 4x + 6$

b) $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$ e $c = 6$.

c) Não é possível, pois não se sabe o valor de x .

9. a)

Entrada (x)	-3	-2	-1	0	1	2	3
Saída (A)	3	0	21	0	3	8	15

b) $f(x) = x^2 + 2x$

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

Leitura e compreensão (p. 83)

- Essa função pode ser classificada como uma função quadrática ou polinomial de 2º grau.
- Não. Por exemplo, as lâmpadas incandescentes foram substituídas por outros modelos, como as lâmpadas fluorescentes e as lâmpadas de LED, por estas serem mais econômicas, uma vez que as lâmpadas incandescentes perdiam parte da energia elétrica em energia térmica e o maior interesse no dispositivo seria a transformação de energia elétrica em energia luminosa. O resistor também tem a função de aquecer em aparelhos como ferro de passar roupas, fogão elétrico, aquecedor de ambientes, secador de mãos, torradeira elétrica, soldador elétrico, etc.
- $P = \frac{U^2}{R} = \frac{110^2}{50} = 242$
 $P = \frac{U^2}{R} = \frac{220^2}{50} = 968$
242 W para 110 V e 968 W para 220 V.
- $P = \frac{U^2}{R} = \frac{110^2}{40} = 302,5$
 $P = \frac{U^2}{R} = \frac{110^2}{80} = 151,25$
A potência varia de 151,25 W a 302,5 W.
- A churrasqueira elétrica pode facilitar o preparo de alimentos dentro de casa sem o uso de churrasqueira a carvão; porém, todos os aparelhos que usam resistência com a função de aquecer têm um gasto de energia elétrica consideravelmente maior que outros eletrodomésticos.

Situações (p. 84)

- a) Se x é a medida de comprimento do lado menor, então a medida de comprimento do lado maior é $2x$. Portanto, a medida de área é dada por $A(x) = x \cdot 2x = 2x^2$.
b) Como $A(x) = 288 \Rightarrow 2x^2 = 288 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$.
 $2 \cdot 12 = 24$
Então, os comprimentos dos lados medem 12 m e 24 m.

2. a) Se a medida de comprimento de altura do muro é x , então a medida de comprimento da largura é $5x$.
 b) Se a medida de comprimento da altura do muro é x e a medida de comprimento da largura é $5x$, então a medida de área é $A(x) = x \cdot (5x) = 5x^2$.
 c) Como vão ser duas demãos, a medida de área total a ser pintada é $2 \cdot A(x) = 2 \cdot 5x^2 = 10x^2$.
 d) $10x^2 = 90 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$
 $5 \cdot 3 = 15$
 Logo, as medidas de comprimento do muro são 3 m e 15 m.
3. a) Para x peças vendidas, o preço de cada peça é $30 - x$.
 b) Como o lucro é obtido pelo produto entre quantidade de itens e o preço deles, o lucro é obtido pela expressão $L(x) = x(30 - x)$.
 c) Fazendo $L(x) = 0 \Rightarrow x(30 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 30$.
4. a) $2x + 0,2x$
 b) A medida de área será dada por $A(x) = (2x + 0,2)x = 2x^2 + 0,2x$.
 c) A equação é $2x^2 + 0,2x = 2,64$.

Atividades

10. a) 1ª passo: $1 \div 2 = \frac{1}{2}$
 2ª passo: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
 3ª passo: $6 \cdot 1 + \frac{1}{4} = \frac{24}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$
 4ª passo: $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$
 5ª passo: $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
 6ª passo: $\frac{2}{1} = 2$
 7ª passo: Para $x = 2$, temos: $2^2 + 2 = 6$. Logo, x é raiz da equação $x^2 + x = 6$.
- b) 1ª passo: $8 \div 2 = 4$
 2ª passo: $4^2 = 16$
 3ª passo: $105 \cdot 1 + 16 = 121$
 4ª passo: $\sqrt{121} = 11$
 5ª passo: $11 - 4 = 7$
 6ª passo: $\frac{7}{1} = 7$

Tecnologias digitais (p. 87)

1. Responda às perguntas a seguir utilizando a equação $ax^2 + bx + c = 0$.
 a) Não. Se $a = 0$, deixaríamos de ter uma equação de 2ª grau.
 b) Não. Caso o termo $b^2 - 4ac$ seja negativo, a expressão $\sqrt{b^2 - 4ac}$ não estaria definida e, por isso, não haveria soluções reais para a equação.
2. $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$.
3. O GeoGebra indica que essa equação não tem raiz real. Isso ocorre porque, para essa equação, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$, temos $b^2 - 4ac = -4 < 0$. Dessa maneira, a equação não tem raízes reais.

Explore para descobrir (p. 88)

1. 1ª passo: $ax^2 + bx = -c$.
 2ª passo: $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
 3ª passo: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$
 4ª passo: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
 5ª passo: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
 6ª passo: $-\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
 7ª passo: $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} =$
 $= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 8ª passo: $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 9ª passo: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Atividades

11. a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 9$
 $x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = 3$ e $x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = 0$
 b) $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$
 f não tem zeros reais.
 c) $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 36$
 $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = -2$ e $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = 4$
 d) $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$
 $x_1 = x_2 = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$
 e) $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$
 $x_1 = x_2 = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = 4$
 f) $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = 81 - 100 = -19 < 0$
 f não tem zeros reais.
12. O coeficiente do termo independente na equação $x^2 - 10x + 21 = 0$ indica o produto das raízes da equação. Como as raízes da equação são as medidas de comprimento das dimensões do *outdoor*, então a medida de área do *outdoor* é 21 m^2 .
 Alternativa **c**.
13. Como o 1ª aluno acertou o coeficiente de x^2 (a) e o de x (b), então pode-se afirmar que $-\frac{b}{a} = 2 + (-14) = -12$.
 Analogamente, $\frac{c}{a} = 2 \cdot 16 = 32$.

A equação original é então equivalente a $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, que é equivalente a $x^2 + 12x + 32 = 0$, cujas raízes são -4 e -8 .

Alternativa **b**.

14. 1ª situação:

Número de prateleiras: p

Número de livros por prateleira: $\frac{300}{p}$

2ª situação:

Número de prateleiras: $p - 3$

Número de livros por prateleira: $\frac{300}{p} + 5$

$$(p - 3) \cdot \left(\frac{300}{p} + 5 \right) = 300 \Rightarrow 300 + 5p - \frac{900}{p} - 15 =$$

$$= 300 \Rightarrow 5p^2 - 15p - 900 = 0 \Rightarrow p^2 - 3p - 180 = 0 \Rightarrow$$

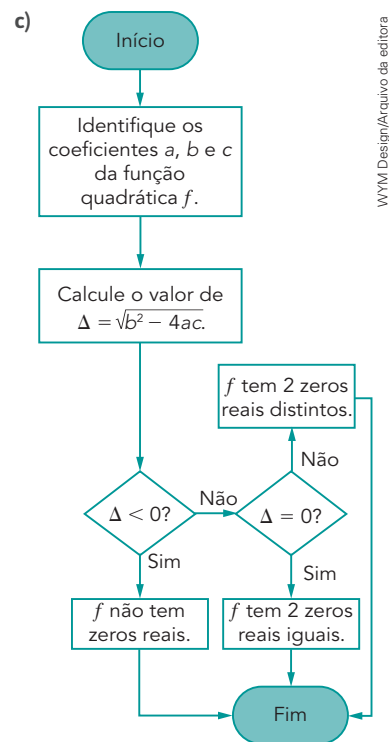
$$\Rightarrow p = -12 \text{ (não serve)} \text{ ou } p = 15.$$

O número de prateleiras é 15, que é múltiplo de 3.

Alternativa **b**.

15. a) Identifique os valores dos coeficientes a , b e c da função quadrática f . Calcule o valor de Δ .

b) Sim, existem duas etapas de decisão. As perguntas são " $\Delta < 0$?" e " $\Delta = 0$?". As respostas possíveis são "sim" e "não" em ambos os casos.



16. a) $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 1 = 0$

b) $x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow (x^2 + 6x + 9) - 9 - 16 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 - 25 = 0$

17. a) $f(x) = x^2 + 10x + 21 \Rightarrow f(x) = (x^2 + 10x + 25) - 25 + 21 \Rightarrow f(x) = (x + 5)^2 - 4$
 $f(x) = 0 \Rightarrow (x + 5)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x + 5)^2 = 4$
 Logo, $x + 5 = 2 \Rightarrow x = -3$, ou, $x + 5 = -2 \Rightarrow x = -7$.

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 \Rightarrow f(x) = (x - 1)^2 - 4$
 $f(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 4$
 Logo, $x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$, ou, $x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$.

18. a) $f(x) = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 9 \Rightarrow x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -1$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow -(x + 1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 4 \Rightarrow x + 1 = 2$ ou $x + 1 = -2 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -3$

19. a) Não é possível definir os zeros da função, uma vez que não sabemos o valor de c , tampouco há dados suficientes para calculá-lo.

b) $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = x^2 + 6x + c$

Para $f(x) = 0$ e $x = 2$, temos:

$$2^2 + 6 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 4 + 12 + c = 0 \Rightarrow c = -16$$

c) $f(x) = x^2 + 6x + 16$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 10}{2} = -3 \pm 5 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ e}$$

$$x_2 = -8$$

Sim, a função f tem 2 zeros, 2 e -8 .

20. Como o termo entre parênteses é sempre um número igual a ou maior do que zero, para que a função assuma o menor valor, o ideal é que esse número seja o menor possível, neste caso, seja igual a zero. Assumindo $x - 1 = 0$, então $f(x) = 10$. Portanto, o menor valor que ela pode assumir é 10.

21. Primeiro, realizamos o completamento de quadrado na lei da função f :

$$f(x) = -3x^2 - x + 1 = -\left(3x^2 + x + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{12} + 1 =$$

$$= -\left(\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} + \frac{12}{12} = -\left(\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{13}{12}$$

Depois do completamento de quadrados, temos um termo ao quadrado na lei da função f . Como esse termo tem sinal negativo, quanto menor for o valor dele, maior será o valor da função. Neste caso, se o termo é nulo, então a função assume o valor máximo. Portanto, o maior valor que ela pode assumir é $\frac{13}{12}$.

22. a) O lucro da empresa é a diferença entre a receita e a despesa, ou seja, $L(d) = R(d) - D(d)$.

b) $L(d) = R(d) - D(d) = (-d^2 + 52d + 660) - (22d + 804) \Rightarrow L(d) = -d^2 + 30d - 144$

Se não houve lucro nem prejuízo, pode-se dizer que $L(d) = 0$. Logo:

$$L(d) = 0 \Rightarrow -d^2 + 30d - 144 = 0 \Rightarrow d^2 - 30d + 144 = 0 \Rightarrow$$

$$= 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 6 \\ d = 24 \end{cases}$$

Esses dias, portanto, foram 6 e 24 de setembro.

23. $147 = 2t^2 - 40t + 347 \Rightarrow 2t^2 - 40t + 200 = 0 \Rightarrow t^2 - 20t + 100 = 0 \Rightarrow t = 10$

O carro freou por 10 segundos.

Alternativa **d**.

24. a) A equação é $\Delta S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$, em que ΔS é a medida de distância percorrida, a é a medida de aceleração do carro, V_0 é a medida de velocidade inicial e t é a medida de intervalo de tempo.

b) $\Delta S = 100$ m; $V_0 = 20$ m/s; $a = 2$ m/s². Logo, temos:

$$100 = 20 \cdot t + \frac{(-2t)^2}{2} \Rightarrow 100 = 20t - t^2$$

Multiplicando os 2 membros da equação por -2 :

$$-200 = 2t^2 - 40t$$

Adicionando 347 aos 2 membros da equação:

$$-200 + 347 = 2t^2 - 40t + 347 \Rightarrow 147 = 2t^2 - 40t + 347$$

c) Resposta pessoal.

25. Sendo x o número de soldados em cada linha, temos:

$$x \cdot (x + 13) = 300 \Rightarrow x^2 + 13x - 300 = 0 \Rightarrow (x + 25)(x - 12) = 0 \Rightarrow x = -25 \text{ (não serve) ou } x = 12.$$

Havia 12 soldados na linha de frente.

Alternativa **b**.

26. Número de amigos que inicialmente deveria comparecer ao jantar: x .

Despesa de cada um se não houvesse falta: $\frac{420}{x}$.

Despesa de cada um com as faltas: $\frac{420}{x-3}$.

Como cada um vai ter de pagar R\$ 18,00 a mais, teremos:

$$\frac{420}{x} = \frac{420}{x-3} - 18 \Rightarrow 420(x-3) = 420x - 18x(x-3) \Rightarrow 420x - 1260 = 420x - 18x^2 - 54x \Rightarrow 18x^2 + 54x - 1260 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 70 = 0 \Rightarrow (x + 10)(x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -10 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

Logo, o grupo de amigos é composto de 7 amigos, mas só compareceram ao jantar 4 amigos.

Tecnologias digitais (p. 95)

1. Porque o discriminante é negativo ($\Delta = -3$) para $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$.
2. Movendo o controle deslizante **c**, pode-se constatar que o menor valor de c que torna o discriminante negativo é 7.
3. Quando $c = 0$, uma das soluções (ou x_1 , ou x_2) é zero.
4. Exemplos de resposta: $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$; $a = 1$, $b = -4$ e $c = 4$ e $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$.

Situações (p. 97)

1. a) Observando o gráfico no plano cartesiano, é possível ver que a abscissa do ponto mais alto é 1. Portanto, a rã avança 1 m.

b) $-x^2 + 2x = 0$
 $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 4$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + 2}{-2} \Rightarrow x = 0 \\ x = \frac{-2 - 2}{-2} \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Os zeros da função são 0 e 2.

c) Exemplo de resposta: Os zeros da função são as abscissas dos pontos em que $y = 0$.

2. a) Observando o gráfico no plano cartesiano, é possível ver que a abscissa do ponto mais alto é 1,5. Portanto, a bailarina avança 1,5 m.

b) Pelo gráfico, as coordenadas do ponto mais alto do salto são (1,5; 1).

c) A bailarina começa o salto no ponto (0; 0) e termina no ponto (3; 0).

d) $-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x = 0$

$$\Delta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot 0 = \frac{16}{9}$$

$$x = \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}}}{2 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{-\frac{8}{9}} \Rightarrow x = \frac{0}{-\frac{8}{9}} \Rightarrow x = 0 \\ x = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}}{-\frac{8}{9}} \Rightarrow x = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{8}{9}} \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

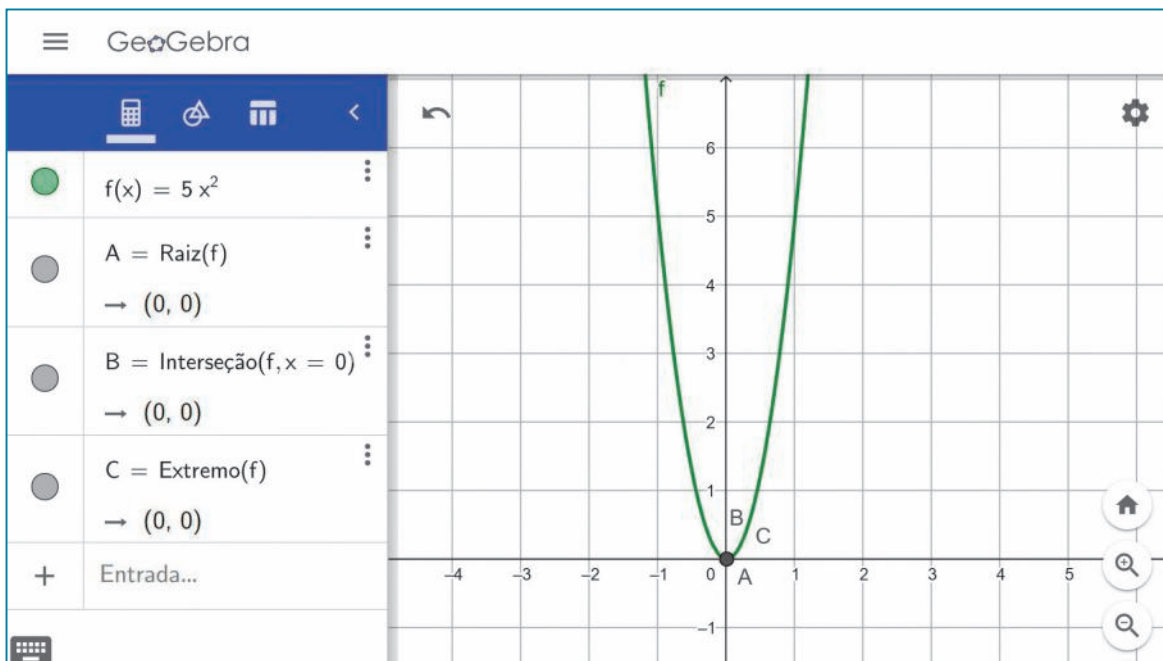
Os zeros da função são 0 e 3.

Explore para descobrir (p. 99)

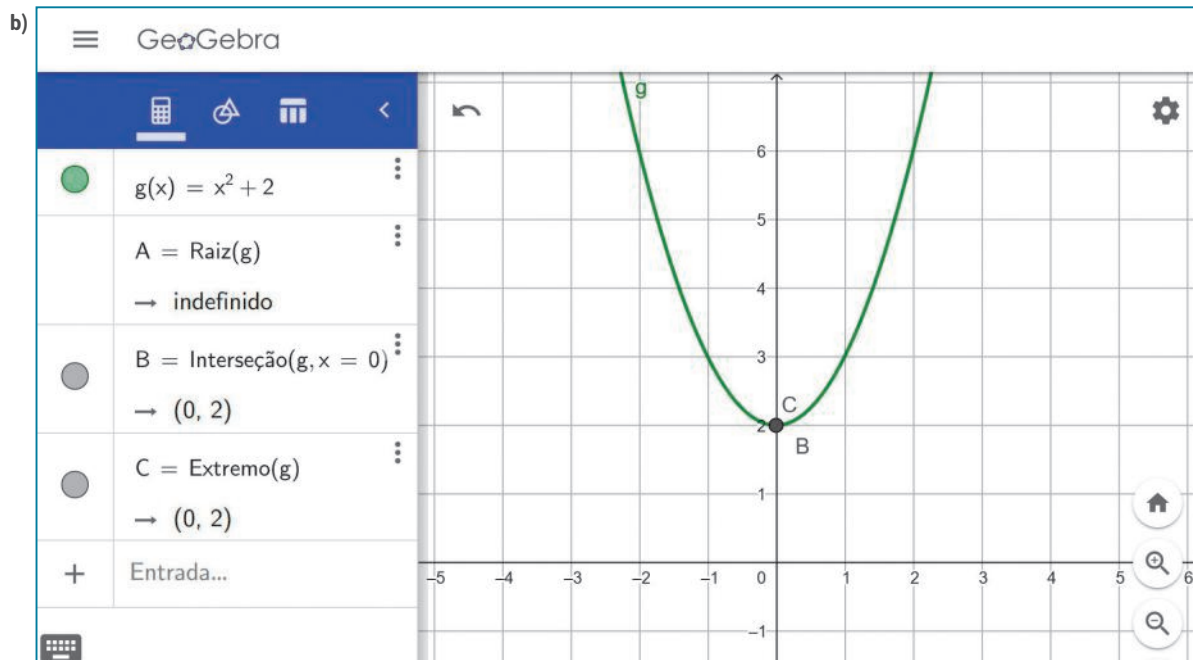
1. Resposta pessoal.
2. Resposta esperada: As medidas de comprimento são iguais.
3. Resposta esperada: Todos os pontos são equidistantes da reta r e do ponto F .

Tecnologias digitais (p. 101)

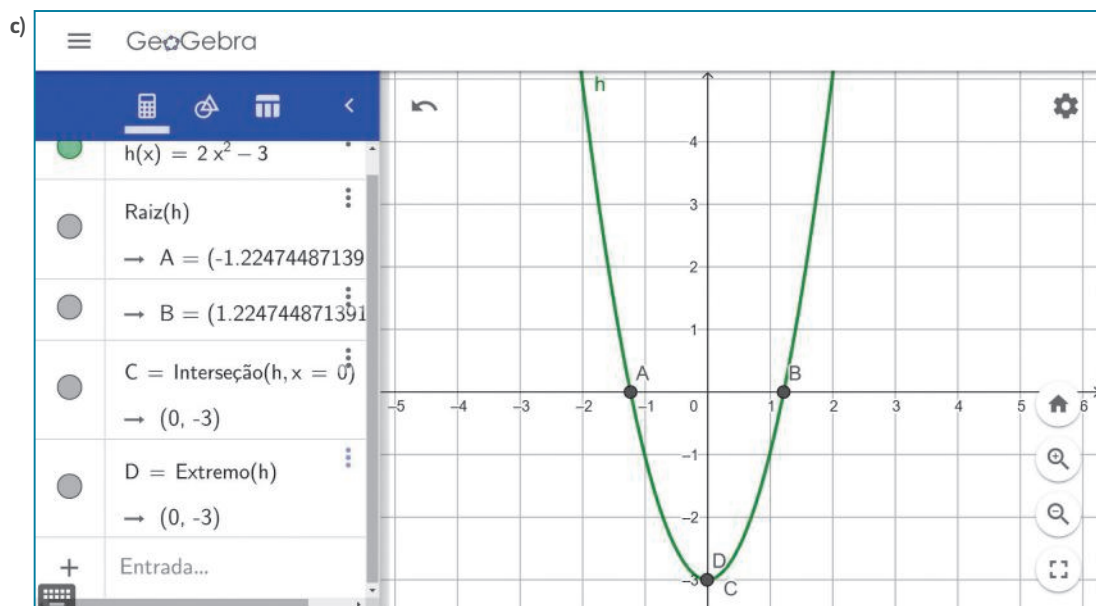
1. Resposta esperada: Os pontos intersectam o eixo x .
2. a) A função é decrescente.
b) A função é crescente.
3. a)



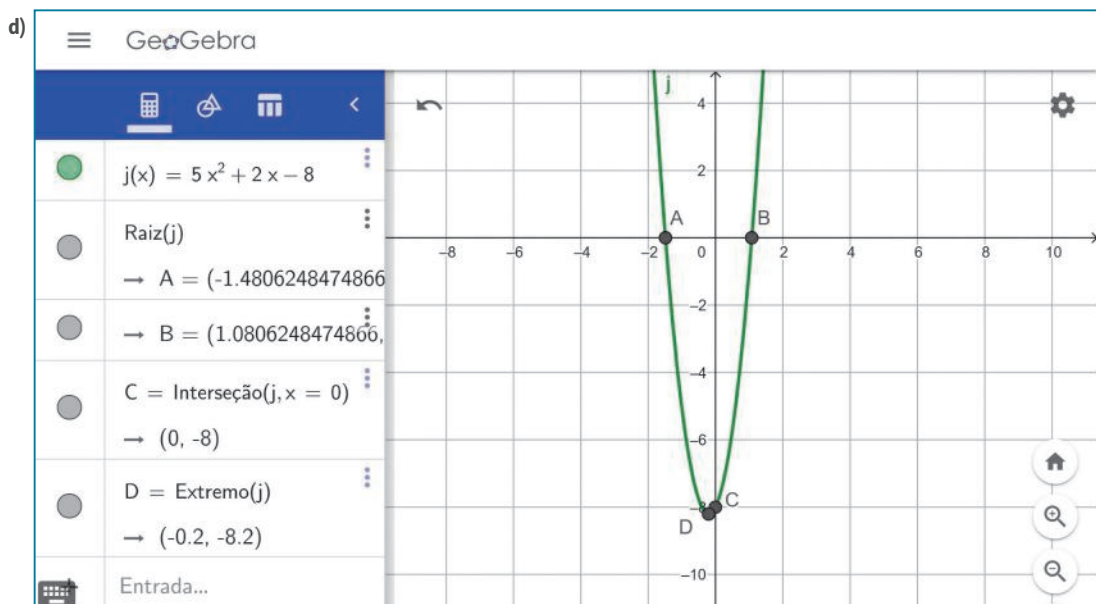
Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Resposta esperada: A concavidade da parábola se altera. Quando $a > 0$, a concavidade fica para cima; quando $a < 0$, a concavidade fica para baixo. Se $a = 0$, a função deixa de ser quadrática e passa a ser função afim. Quanto maior o valor absoluto de a , menor é a abertura da parábola; quanto menor o valor absoluto de a , maior é a abertura da parábola.
- Resposta esperada: Quando $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y com a parte crescente; quando $b = 0$, o vértice da parábola fica no eixo y; quando $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y com a parte decrescente.
- Resposta esperada: O coeficiente c é a ordenada do ponto no qual a parábola intersecta o eixo y.
- Resposta esperada: Neste caso, o gráfico da função intersecta o eixo x em 1 único ponto e $\Delta = 0$.
- $\Delta = 0$ sempre que $b^2 - 4ac = 0$. Exemplos de resposta: $a = 1, b = 0, c = 0$, $a = 1, b = 4, c = 4$.
- Resposta esperada: Quando $\Delta = 0$, o gráfico intersecta o eixo x em 1 único ponto; quando $\Delta > 0$, o gráfico intersecta o eixo x em 2 pontos distintos; quando $\Delta < 0$, o gráfico não intersecta o eixo x.

Refleta (p. 104)

Os valores da segunda linha representam o quadrado dos valores da primeira linha.

Refleta (p. 104)

Exemplos de resposta: (4, 16); (-3, 9); (1,2; 1,44).

Explore para descobrir (p. 104)

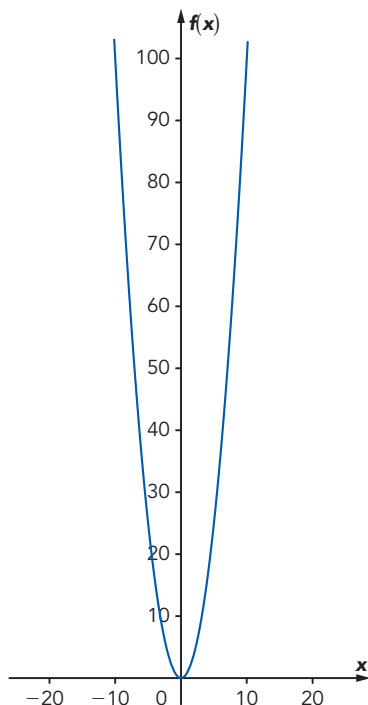
1.

x	$f(x)$
-10	100
-9	81
-8	64
-7	49
-6	36
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

a) São iguais, $y = 4$.

b) São iguais, $y = 49$.

2. O eixo y é o eixo de simetria da parábola.



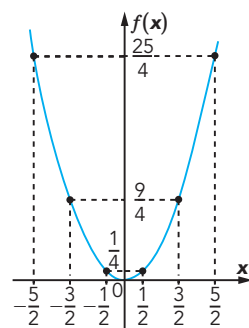
3. a) O valor de y é multiplicado por 4.
 b) O valor de y é multiplicado por 9.
 c) O valor de y é multiplicado por n^2 .
4. a) Resposta esperada: Assim como na função dada por $f(x) = x^2$, o eixo y é o eixo de simetria da parábola de qualquer função dada por $f(x) = ax^2$ para qualquer a real não nulo.
 b) É possível dizer que $f(x) = f(-x)$.

Refleta (p. 105)

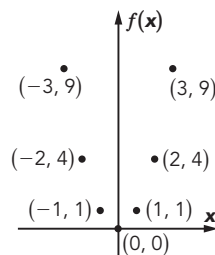
$$f(nx) = a(nx)^2 = a \cdot n^2x^2 = n^2 \cdot ax^2 = n^2 \cdot f(x).$$

Atividades

27. a) É diretamente proporcional, pois a lei de f é da forma $f(x) = ax^2$.
 b) Não é diretamente proporcional, pois a lei de f não é da forma $f(x) = ax^2$.
 c) É diretamente proporcional, pois a lei de f é da forma $f(x) = ax^2$.
 d) Não é diretamente proporcional, pois a lei de f não é da forma $f(x) = ax^2$.
 e) É diretamente proporcional, pois a lei de f é da forma $f(x) = ax^2$.
 f) Não é diretamente proporcional, pois a lei de f não é da forma $f(x) = ax^2$.
28. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$; $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

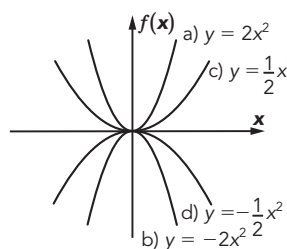


29.



30. Resposta pessoal.

31.



Reflita (p. 108)

Porque para ser uma função ela precisa ter um único valor de y para cada x do domínio, e o domínio da função quadrática é $\mathbb{R}$.

Reflita (p. 108)

A curva intersecta o eixo y quando $x = 0 \Rightarrow f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.

Atividades

32. Para $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$. O ponto $A(2, 0)$ pertence à parábola.
Para $x = 4 \Rightarrow f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = -2$. O ponto $B(4, 2)$ não pertence à parábola.
Para $x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$. O ponto $C(-1, 12)$ pertence à parábola.
Alternativas **a** e **c**.

33. Para $x = 2 \Rightarrow f(2) = (m + 1) \cdot (2)^2 - 1 = 1 \Rightarrow 4m + 4 - 1 = 1 \Rightarrow 4m = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$.

34. a) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 30 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 6) = 0 \Rightarrow x' = 5$ e $x'' = 6$
 $x = 0 \Rightarrow f(0) = 30$
Eixo x : $(5, 0)$ e $(6, 0)$; eixo y : $(0, 30)$.

- b) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 7) = 0 \Rightarrow x' = 3$ e $x'' = -7$
 $x = 0 \Rightarrow f(0) = -21$
Eixo x : $(3, 0)$ e $(-7, 0)$; eixo y : $(0, -21)$.

- c) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x' = 6$ e $x'' = -6$
 $x = 0 \Rightarrow f(0) = -36$
Eixo x : $(6, 0)$ e $(-6, 0)$; eixo y : $(0, -36)$.

- d) $f(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} \Rightarrow x' = \frac{1}{2}$ e $x'' = \frac{1}{3}$
 $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

Eixo x : $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(\frac{1}{3}, 0)$; eixo y : $(0, 1)$.

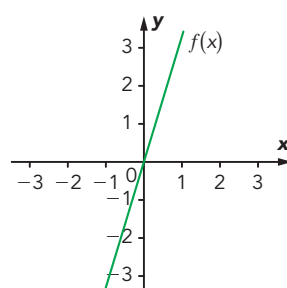
35. a) $a < 0$, pois a concavidade é para baixo; $\Delta > 0$, pois a parábola intersecta o eixo em 2 pontos.
b) $a > 0$, pois a concavidade é para cima; $\Delta > 0$, pois a parábola intersecta o eixo em 2 pontos.
c) $a > 0$, pois a concavidade é para cima; $\Delta < 0$, pois a parábola não intersecta o eixo.
d) $a < 0$, pois a concavidade é para baixo; $\Delta = 0$, pois a parábola intersecta o eixo em 1 ponto.
e) $a < 0$, pois a concavidade é para baixo; $\Delta < 0$, pois a parábola não intersecta o eixo.
f) $a > 0$, pois a concavidade é para cima; $\Delta = 0$, pois a parábola intersecta o eixo em 1 ponto.

36. A concavidade está para baixo, então temos $a < 0$.
A curva intersecta o eixo x em 2 pontos distintos, então:
 $\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$
Alternativa **b**.

37. $c = 4$, pois é o ponto em que a curva intersecta o eixo y .
 $f(x) = a(x - (-1))(x - 4) = a(x + 1)(x - 4) = ax^2 - 3ax - 4a$
 $c = 4 \Rightarrow -4a = 4 \Rightarrow a = -1$
 $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

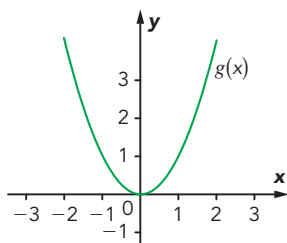
38. a) $a < 0$, pois a concavidade da parábola está para baixo; $b < 0$, pois a parábola intersecta o eixo y na parte decrescente da curva; $c > 0$, pois a parábola intersecta o eixo y na parte positiva do eixo.
b) $a > 0$, pois a concavidade da parábola está para cima; $b > 0$, pois a parábola intersecta o eixo y na parte crescente da curva; $c < 0$, pois a parábola intersecta o eixo y na parte negativa do eixo.
c) $a < 0$, pois a concavidade da parábola está para baixo; $b > 0$, pois a parábola intersecta o eixo y na parte crescente dela; $c = 0$, pois a parábola intersecta o eixo y na origem do plano cartesiano.

39. a) $f(x) = 4x$. Essa é uma função afim.



WYM Design/Arquivo da editora

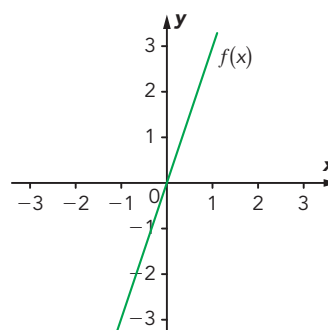
- b) $g(x) = x^2$. Essa é uma função quadrática.



WYM Design/Arquivo da editora

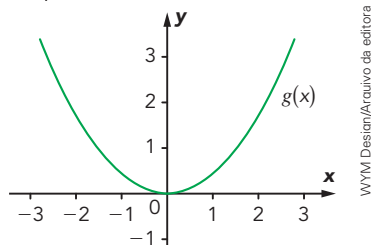
- c) Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada.
Triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.
d) Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2 .

40. a) $f(x) = 3x$. Essa é uma função afim.



WYM Design/Arquivo da editora

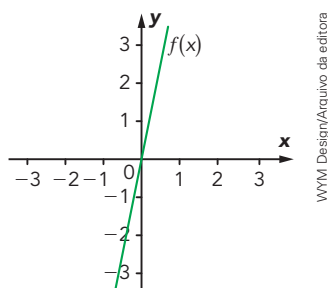
b) $g(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Essa é uma função quadrática.



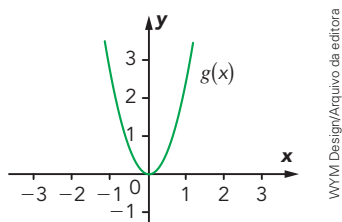
c) Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada. Triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.

d) Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2 .

41. a) $f(x) = 6x$. Essa é uma função afim.



b) $g(x) = \frac{x^2 3\sqrt{3}}{2}$. Essa é uma função quadrática.



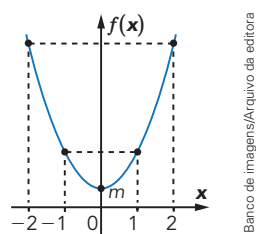
c) Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada. Triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.

d) Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2 .

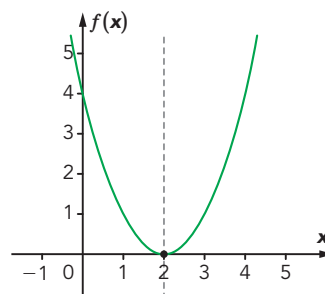
42. a) $V(0, 1)$ b) $V(0, 2)$ c) $V(0, -1)$ d) $V(0, -1)$

43. Valor mínimo: $f(x) \rightarrow 1$, $h(x) \rightarrow -1$, $j(x) \rightarrow -1$; valor máximo: $g(x) \rightarrow 2$.

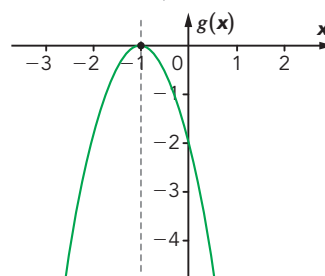
44.



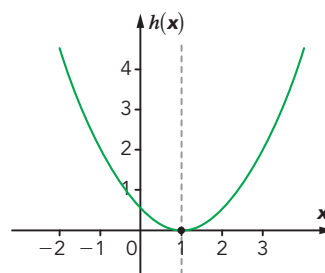
45. a)



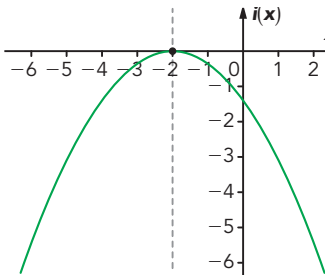
b)



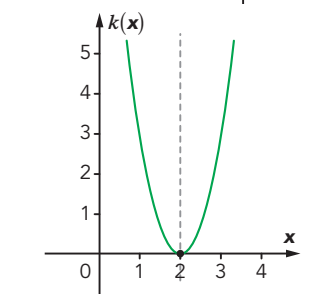
c)



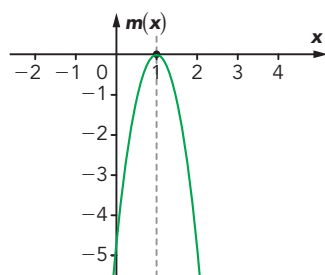
d)



e)



f)



46. a) g , j e m .

b) f , h e k .

c) Esses pontos são os vértices das parábolas. $V_f(2, 0)$; $V_g(-1, 0)$; $V_h(1, 0)$; $V_i(-2, 0)$; $V_k(2, 0)$; $V_m(1, 0)$.

47. a) Ele é deslocado 2 unidades para a direita.
 b) Ele é deslocado 2 unidades para a esquerda.
 c) $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.
48. a) $y = x^2 \Rightarrow V(0, 0)$
 $y = (x - 2)^2 + 3 \Rightarrow V(2, 3)$
 $y = (x + 2)^2 - 3 \Rightarrow V(-2, -3)$
- b) Ele é deslocado 3 unidades para cima e 2 unidades para a direita.
 c) Ele é deslocado 3 unidades para baixo e 2 unidades para a esquerda.
 d) Ele é deslocado k unidades para baixo e m unidades para a direita, se $k > 0$ e $m > 0$.
 Ele é deslocado k unidades para cima e m unidades para a direita, se $k < 0$ e $m > 0$.
 Ele é deslocado k unidades para baixo e m unidades para a esquerda, se $k > 0$ e $m < 0$.
 Ele é deslocado k unidades para cima e m unidades para a esquerda, se $k < 0$ e $m < 0$.
 e) Resposta pessoal.

Conexões (p. 113)

- Sim, assim como a parábola, a catenária apresenta um eixo de simetria que passa pelo vértice dela.
- A curva se afasta do eixo de simetria.
- Catenária, pois a corda está presa em dois pontos e sujeita à força da gravidade.
- Exemplos de resposta: Cabos de sustentação da cobertura do Velodrome Stadium (Santiago Calatrava) e cascas sustentadas pelas paredes externas da Sydney Opera House (Jorn Utzon e Ove Arup & Partners).
- Resposta pessoal. Exemplos de resposta: Arcos no sótão e na Casa Millá; arcos na arcada do Colégio de las Teresianas.

Atividades resolvidas – Ampliando o problema (p. 116)

9. a) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{6}{3} = 2$

A coordenada de V é $V(2, 0)$.

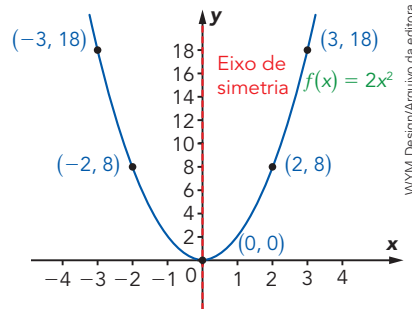
- b) Exemplo de resposta: As indústrias procuram ter medidas bem precisas para evitar o desperdício de material e insumos. Essa é uma maneira de promover a competitividade ao manter os preços dentro da média do mercado.

Atividades

49. a) $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-2b}{2} = -\frac{b}{a}$
 $= \frac{-2b}{2a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-b}{2a}$

b) $y_v = ax_v^2 + bx_v + c = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c =$
 $= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$
 $y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$

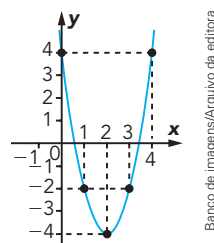
50.



$f(x) = 2x^2$

51. a) $c = 3$, pois é o ponto em que a curva intersecta o eixo y .
 O vértice é $V(1, 2)$.
 Pela forma canônica: $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v = a(x - 1)^2 + 2 = ax^2 - 2ax + a + 2$.
 Como $c = 3$, temos $a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$.
 Logo, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
- b) $c = 2$, pois é o ponto em que a curva intersecta o eixo y .
 O vértice é $V(0, 2)$.
 Pela forma canônica: $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v = a(x - 0)^2 + 2 = ax^2 + 2$.
 Como $f(1) = 3 \Rightarrow a \cdot 1^2 + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$.
 Logo, $f(x) = x^2 + 2$.
- c) $c = 0$, pois é o ponto em que a curva intersecta o eixo y .
 O vértice é $V(2, 4)$.
 Pela forma canônica: $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v = a(x - 2)^2 + 4 = ax^2 - 4ax + 4a + 4$.
 Como $c = 0$, temos: $4a + 4 = 0 \Rightarrow a = -1$.
 $f(x) = -1x^2 - 4 \cdot (-1)x + 4 \cdot (-1) + 4 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 4 + 4 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x$

52.



Como a concavidade da parábola é para cima, $a > 0$.
 Como a parábola intersecta o eixo y na parte decrescente do gráfico, $b < 0$.
 Como a parábola intersecta o eixo y em $(0, 4)$, $c = 4$.
 Portanto, a função correta é $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$.
 Alternativa **b**.

53. O ponto mais alto vai ocorrer na metade da medida de intervalo de tempo total, isto é, em 1 segundo.
54. Como $a > 0$, a ordenada do vértice indica o valor mínimo que a função pode assumir em todo o domínio dela.
 a) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{80}{2} = 40$ b) $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{5600}{4} = 1400$
 40 unidades. R\$ 1.400,00.
55. Como $a < 0$, a ordenada do vértice indica o valor máximo que a função pode assumir em todo o domínio dela.
 a) $t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$
 2 segundos.
 b) $h_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-40}{-4} = 10$
 10 metros.

$$c) -t^2 + 4t + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 40$$

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{-2} = 2 \pm \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 - \sqrt{10} \text{ não convém} \\ t_2 = 2 + \sqrt{10} \approx 5,16 \end{cases}$$

5,16 min $\approx$ 5 min 10 s = 310 s
310 segundos.

56. Seja x o número de lugares vazios ($0 \leq x \leq 40$). O lucro da empresa é dado pela função de lei $L(x) = (40 - x)(20 + 2x) = -2x^2 + 60x + 800 = -x^2 + 30x + 400$. Para determinar o lucro máximo, basta determinar a abscissa do vértice da parábola da função $L(x)$.

$$L(x) = -x^2 + 30x + 400 \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 \cdot (-1)} = 15$$

Portanto, temos o lucro máximo da empresa quando 15 passageiros forem transportados.

57. A medida de intervalo de tempo até o nível máximo de concentração é dada pela abscissa do vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-6}{-\frac{1}{2}} = 12$$

12 horas.

Alternativa c.

58. Como a medida de temperatura quando a câmara foi ligada era de 12°C , então $T(0) = 12 \Rightarrow 0 - 8 \cdot 0 + k = 12 \Rightarrow k = 12$.

Assim, temos que $T(t) = t^2 - 8t + 12$.

$$a) T(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 6 \end{cases}$$

A medida de temperatura será de 0°C nos instantes 2 min e 6 min.

$$b) T_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = 4$$

A medida de temperatura será mínima aos 4 min.

$$c) T(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 12 = 16 - 32 + 12 = -4$$

A medida de temperatura mínima será de -4°C .

$$d) \text{ A câmara foi desligada quando } t = 10. \text{ Então: } T(10) = 10^2 - 8 \cdot 10 + 12 = 32.$$

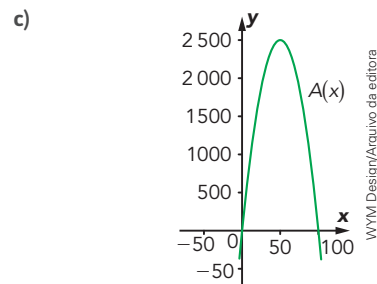
Ao desligar a câmara, a medida de temperatura era de 32°C .

59. a) Medida de perímetro: 200 metros.
Medida de comprimento da largura da quadra: x metros.
Medida de comprimento da profundidade da quadra: y metros.
 $2x + 2y = 200 \Rightarrow y = 100 - x$
A medida de área é dada por: $A(x) = (100 - x) \cdot x = 100x - x^2$.

- b) O valor de x , quando a medida de área é máxima, é dado pela abscissa do vértice da parábola correspondente.

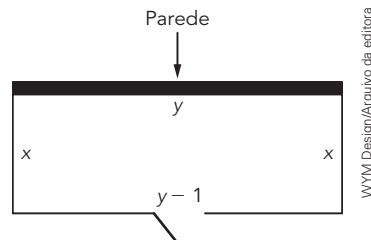
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{-2} = 50$$

Portanto, as medidas de comprimento das dimensões devem ser 50 m por 50 m.



60. Suponha que a medida de comprimento da largura é de x metros e que a medida de comprimento da profundidade é de y metros.

A imagem a seguir representa o galinheiro com essas dimensões.



O total de tela gasto nessa situação é dado por:

$y - 1 + x + x = 15$. Logo, $y = 16 - 2x$.

A medida de área é dada por: $A(x) = (16 - 2x) \cdot x = 16x - 2x^2$.

O valor de x , quando a medida de área é máxima, é dado pela abscissa do vértice da parábola correspondente.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{-4} = 4$$

$$A(4) = 16x - 2x^2 = 16 \cdot 4 - 2 \cdot (4^2) = 64 - 32 = 32$$

A maior medida de área que podemos obter é 32 m^2 .

61. y é o retorno financeiro.

x é o preço de cada livro.

Considerando o preço do livro igual a 0, o retorno é de 0 real $\Rightarrow A(0, 0)$.

Considerando o preço do livro igual a 20, o retorno é de 4.000 reais $\Rightarrow B(20, 4000)$.

Considerando o preço do livro igual a 24, o retorno é de 0 real $\Rightarrow C(24, 0)$.

Logo, a função de retorno pode ser dada por:

$$R(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - 0)(x - 24) = ax^2 - 24ax$$

$$R(x) = ax^2 - 24ax \Rightarrow 4000 = a(20^2) - 24 \cdot a \cdot 20 \Rightarrow 4000 = 400a - 480a \Rightarrow a = -50$$

$$R(x) = -50x^2 + 1200x$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1200}{-100} = 12$$

O preço deve ser R\$ 12,00.

62. a) $V(x) = kx \cdot (P - x) = -kx^2 + Pkx = -kx^2 + 460\,000 \cdot kx$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-460\,000 \cdot k}{2 \cdot (-k)} = 230\,000$$

O número de pessoas infectadas deve ser 230 mil.

- b) Exemplo de resposta: Qual é a velocidade máxima de disseminação quando $k = 0,5$?

A resposta para essa pergunta poderia ser calculada pelo y do vértice.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[(460\,000 \cdot 0,5)^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot 0]}{4 \cdot (-0,5)} =$$

$$= \frac{-52\,900\,000\,000}{-2} = 25\,450\,000\,000$$

63. A produção de mangas será calculada pelo produto entre a quantidade de mangueiras e a quantidade de mangas produzidas por cada uma delas.

$$P(x) = (50 + x) \cdot (400 - 20x) \Rightarrow P(x) = -20x^2 - 600x + 20\,000$$

$$P_{\max} = y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(600^2 - 4 \cdot (-20) \cdot 20\,000)}{4 \cdot (-20)} = 24\,500$$

A produção anual máxima é de 24 500 mangas.

Alternativa a.

64. x é o número de clientes sem os acompanhantes.
 p é o preço de entrada por pessoa: $p = 100 - 2x$ (I).
 A função Lucro é dada pela lei:

$$L(x) = x \cdot p + x \cdot \frac{p}{2} - 2x \cdot 15 = 1,5xp - 30x \text{ (II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$L(x) = 1,5x \cdot (100 - 2x) - 30x = 150x - 3x^2 - 30x \Rightarrow L(x) = -3x^2 + 120x$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{-6} = 20$$

O número de frequentadores deve ser 20.

Alternativa **b**.

Conexões (p. 120)

1. Nessas condições, temos que:

$$H(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_{0y} \cdot t + H_0$$

$$H(t) = -5t^2 + 6t + 2$$

Calculamos as coordenadas (x, y) do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-5)} = 0,6$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(36 + 40)}{4 \cdot (-5)} = \frac{76}{20} = 3,8$$

A medida de comprimento de altura máxima será 3,8 m e ocorrerá no instante 0,6 s.

2. Exemplos de resposta: Queda de um paraquedista com o paraquedas aberto; movimento de voo de um avião.
 3. Exemplos de resposta: Manutenção da capacidade funcional; integração social; aumento da qualidade de vida em razão da melhora da saúde física, pois a prática de esportes pode evitar dores e mal-estar e prevenir e/ou retardar o aparecimento de algumas doenças, além de auxiliar no tratamento delas.

Vestibulares e Enem (p. 123)

$$1. y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[30^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-200)]}{-4} = \frac{900 - 800}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

O lucro máximo é R\$ 25,00.

Alternativa **d**.

2. $g(x) = f(x) \Rightarrow x^2 - x + 2 = x + 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ e $x_2 = 3$
 $g(x_1) = (-1)^2 - (-1) + 2 = 4$
 $g(x_2) = (3)^2 - 3 + 2 = 8$
 $4 + 8 = 12$
 A soma é 12.
 Alternativa **e**.

$$3. y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[0^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8]}{-8} = \frac{-64}{-8} = 8$$

A medida de comprimento de altura máxima é 8 metros.

Alternativa **c**.

$$4. y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[(1,2)^2 - 4 \cdot (-0,1) \cdot (2,5)]}{4 \cdot (-0,1)} = \frac{-(1,44 + 1)}{-0,4} = \frac{2,44}{-0,4} = -6,1$$

A medida de comprimento de altura máxima é 6,1 metros.

Alternativa **a**.

5. $160 = -t^2 + 13t + 130 \Rightarrow t^2 - 13t + 30 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t - 10) = 0 \Rightarrow t_1 = 3$ e $t_2 = 10$ (não convém).

Após 3 dias.

Alternativa **b**.

$$6. \frac{1}{100}(64 + 88t - t^2) = 20 \Rightarrow 64 + 88t - t^2 = 2000 \Rightarrow t^2 - 88t + 1936 = 0$$

$$\Delta = (-88)^2 - 4 \cdot (1) \cdot 1936 = 7744 - 7744 = 0$$

$$t = \frac{-(-88) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = 44$$

Logo, $35 < t < 45$.

Alternativa **a**.

7. $V(0) = 1800 \Rightarrow 75 \cdot (0^2 - 10 \cdot 0 + k) = 1800 \Rightarrow 75k = 1800 \Rightarrow k = 24$
 $75 \cdot (x^2 - 10x + 24) = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ e $x_2 = 6$ (não convém).
 O reservatório ficará completamente vazio para $x = 4$.
 Alternativa **c**.

8. $f(t) = 1600 \Rightarrow -2t^2 + 120t - 1600 = 0 \Rightarrow t^2 - 60t + 800 = 0 \Rightarrow (t - 20)(t - 40) = 0 \Rightarrow t_1 = 20$ e $t_2 = 40$
 A segunda dedetização deverá ocorrer no 20º dia.
 Alternativa **b**.

9. $Q = at^2 + bt + c$
 Para $(0, 1) \Rightarrow 1 = a \cdot (0)^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 1$.
 Para $(1, 4) \Rightarrow 4 = a \cdot (1)^2 + b \cdot 1 + 1 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow b = 3 - a$.
 Para $(2, 6) \Rightarrow 6 = a \cdot (2)^2 + b \cdot 2 + 1 \Rightarrow 4a + 2b - 5 = 0 \Rightarrow -a + b - 2,5 = 0 \Rightarrow -a + 3 - a - 2,5 = 0 \Rightarrow a = -0,5$.
 Logo, $b = 3 - a \Rightarrow b = 3,5$.
 Para $t = 3$, temos: $Q = at^2 + bt + c \Rightarrow Q = -0,5t^2 + 3,5t + 1 \Rightarrow Q = -0,5 \cdot (3)^2 + 3,5 \cdot (3) + 1 \Rightarrow Q = -4,5 + 10,5 + 1 \Rightarrow Q = 7$.
 A quantidade é igual a 7 miligramas.
 Alternativa **b**.

10. Os pontos de intersecção com o eixo x são $(0, 0)$ e $(150, 0)$.
 O vértice é $(75, 25)$.
 $y = a(x - 0)(x - 150) = ax^2 - 150ax$
 Para $(75, 25)$, temos: $25 = a(75)^2 - 150 \cdot a \cdot 75 \Rightarrow 5625a - 11250a = 25 \Rightarrow a = \frac{-1}{225}$
 $y = ax^2 - 150ax \Rightarrow y = \frac{-x^2}{225} - \left(\frac{-150x}{225}\right) \Rightarrow y = \frac{-x^2 + 150x}{225} \Rightarrow 225y = -x^2 + 150x$
 A equação é $225y = 150x - x^2$.
 Alternativa **e**.

$$11. T_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[(22)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-85)]}{4 \cdot (-1)} = \frac{-(484 - 340)}{-4} = \frac{144}{4} = 36$$

Como $T = 36$, então $30 < T < 43$. Logo, a classificação é alta.
 Alternativa **d**.

12. Os pontos de intersecção com o eixo x são $(0, 0)$ e $(10, 0)$, e temos o ponto $(1, 3)$.
 $y = a(x - 0)(x - 10) = ax^2 - 10ax$
 Para $(1, 3)$, temos: $3 = a \cdot (1)^2 - 10a \cdot (1) \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$.

$$\text{Logo, } y = \frac{-1}{3}x^2 + \frac{10}{3}x.$$

$$\text{Para } x = 5, \text{ temos: } y = \frac{-1}{3} \cdot 5^2 + \frac{10}{3} \cdot 5 = \frac{-25}{3} + \frac{50}{3} = \frac{25}{3}.$$

H é $\frac{25}{3}$ metros.

Alternativa **d**.

Referências bibliográficas comentadas

Para a concepção desta coleção, tanto do Livro do Estudante quanto dos textos deste Manual, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e sites foram consultados de modo a trazer materiais atualizados e que visam dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste volume.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. Porto Alegre: Penso, 2018.

Nesse livro, os estudantes são colocados no centro do processo educacional por meio do uso de metodologias ativas que favorecem a aprendizagem deles. Além disso, diversos tipos de metodologia ativa são analisados por uma perspectiva que tem como fundamento o desenvolvimento de competências, vinculado à construção e à formalização de conhecimentos. Esse livro serviu de referência para a concepção do descritivo teórico das metodologias ativas apresentadas neste Manual e das propostas de utilização delas nas práticas pedagógicas deste volume.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador*. Porto Alegre: Penso, 2018.

A autora defende, nesse livro, que a maneira como um estudante encara os próprios erros pode ser uma poderosa ferramenta no processo de aprendizagem e de ensino. Incentiva, ainda, o estudo produtivo e prazeroso da Matemática. No livro também são apresentados estudos que usaram tecnologias recentes para mostrar como o cérebro funciona quando aprendemos. Todos esses pontos foram levados em consideração durante a elaboração tanto dos textos teóricos sobre avaliação, deste Manual, como da proposta didática desta coleção.

BOALER, J. *O que a Matemática tem a ver com isso?: como professores e pais podem transformar a aprendizagem da Matemática e inspirar sucesso*. Porto Alegre: Penso, 2019.

A obra tem um enfoque interessante sobre a aprendizagem da Matemática, comentando que alguns fatores interferem no melhor entendimento dessa área, como a abordagem baseada em projetos, a avaliação que incentiva a aprendizagem e as estratégias e maneiras fundamentais de trabalhar, o que norteou a elaboração das propostas de avaliação presentes neste Manual. No livro também é definido o conceito do aprendizado da Matemática e a importância dele.

BORBA, M. de C. et al. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Esse livro aborda as mudanças ocasionadas nas aulas de Matemática por causa da inserção das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem e inspirou a elaboração das propostas didáticas com tecnologias digitais desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 24 ago. 2020.

O texto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) norteou a elaboração dos volumes desta coleção, tanto dos textos destinados aos professores quanto dos propostos aos estudantes, assim como a proposta didática de distribuição dos conteúdos nos seis volumes. As páginas introdutórias da BNCC e as dedicadas à etapa do Ensino Médio orientaram especificamente a vinculação entre os tópicos trabalhados nesta coleção conforme as diretrizes desse documento normativo.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica*. Brasília: Ministério da Educação, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/>. Acesso em: 24 ago. 2020.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica (DCNs) são um conjunto de definições de princípios, fundamentos e procedimentos da Educação Básica elaborado com o objetivo de orientar e assistir escolas e redes no desenvolvimento do projeto pedagógico. Essas diretrizes também fornecem subsídios para a elaboração de materiais didáticos e, por isso, foram consultadas e consideradas na elaboração desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 24 ago. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC: proposta de práticas de implementação*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 24 ago. 2020.

De acordo com a BNCC, os Temas Contemporâneos Transversais buscam uma contextualização do que é ensinado por meio de temas que são do interesse dos estudantes e que têm relevância para o desenvolvimento deles como cidadãos. Por isso, devem ser

incorporados aos currículos e às propostas pedagógicas escolares, de preferência de maneira transversal e integradora. Após a homologação da BNCC, visando esclarecer a inserção desses temas, esses dois documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação, passando a servir de referencial para a concepção dos textos teóricos deste Manual, bem como de diversas propostas didáticas desta coleção.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil: adolescência, educação e participação democrática*. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

Nesse livro, a educação é abordada considerando o jovem como núcleo central do processo educativo, o que condiz com a concepção pedagógica adotada em todos os volumes desta coleção. Para explanar essa realidade, o livro apresenta a descrição de projetos desenvolvidos na prática envolvendo experiências de protagonismo juvenil. Há também o relato dos jovens que participam desses projetos.

CULTURA de paz: da reflexão à ação; balanço da Década Internacional da Promoção da Cultura de Paz e Não Violência em Benefício das Crianças do Mundo. Brasília, DF: Unesco; São Paulo: Associação Palas Athena, 2010. Disponível em: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000189919>. Acesso em: 24 ago. 2020.

Essa publicação da Unesco trata da Cultura de paz, consultada para a elaboração deste Manual, e é uma leitura recomendada para a compreensão desse assunto, que compõe também o cotidiano escolar, visto que os estudantes, futuro de nossa sociedade, precisam internalizar como modo de ser e viver a cultura da legitimidade e do respeito entre todos os cidadãos.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1).

A leitura dessa obra favorece o exame crítico da função social que a Matemática exerce em cada cultura e forneceu subsídios para construir as concepções e propostas relacionadas à Etnomatemática desta coleção.

ELLEMBERG, J. *O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar errado*. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

O autor mostra, nesse livro, a necessidade de maior embasamento do pensamento matemático, pois há casos em que a intuição pode falhar. De maneira motivadora, incentiva essa busca por mais conhecimento e faz com que o leitor desenvolva o olhar crítico, por meio de exemplos reais e instigantes, o que inspirou propostas didáticas utilizadas nesta coleção.

LIMA, E. L. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: SBM, 2007 (Coleção do Professor de Matemática).

O autor apresenta uma visão sobre escolas, professores e estudantes e sugere uma melhor abordagem por parte dos professores no que tange aos temas matemáticos, que foi considerada ao elaborar as orientações didáticas desta coleção. Ressalta, ainda, que qualquer estudante nas séries iniciais é capaz de aprender Matemática.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. 19. ed. São Paulo: Cortez, 2008.

Nesse livro, estão compilados estudos sobre a temática de avaliação. A obra alicerçou e corroborou os comentários sobre possíveis procedimentos de como avaliar os estudantes propostos neste Manual, favorecendo a educação integral, e não apenas a mensuração quantitativa de notas.

MAIA, D. *Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional*. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11133>. Acesso em: 8 set. 2020.

Essa dissertação de Mestrado em Educação apresenta uma abordagem para o trabalho com as funções quadráticas utilizando tecnologias digitais, com foco na conversão entre representações algébricas e representações geométricas e gráficas e na análise da relação entre os coeficientes dessas funções e características dos gráficos delas. Esse trabalho serviu de referência para aspectos didáticos das seções *Tecnologias digitais* deste volume.

MATTOS, J. R. L.; POLEGATTI, G. A. Um encontro etnomatemático na educação escolar indígena: a função das flautas dos Rikbaktsa. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Curitiba, 2013.

Nesse artigo, apresentando no XI Encontro Nacional de Educação Matemática, os pesquisadores José Roberto Mattos e Geraldo Polegatti fazem uma profunda investigação de enfoque etnomatemático nas práticas sociais do povo Rikbaktsa (grupo indígena de Mato Grosso) e como elas se relacionam aos processos de ensino e aprendizagem de funções afins. Esse artigo foi utilizado como referência na elaboração do texto seção *Além da sala de aula* deste volume, e também como alicerce teórico e metodológico na elaboração das atividades propostas nessa seção e nas sugestões de desenvolvimento referentes a ela.

PERRENOUD, P. *As competências para ensinar no século XXI: a formação dos professores e o desafio da avaliação*. Tradução de Cláudia Schilling e Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.

A educação por competências com base no desenvolvimento de habilidades e valores não é uma novidade no âmbito educacional, e sim uma perspectiva de ensino já caracterizada como adequada ao século XXI. Nesse livro, essa e outras perspectivas são apontadas e descritas, a fim de ressignificar as atuações em sala de aula dos professores, e foi utilizado para a elaboração tanto dos textos deste Manual como para embasar toda a concepção pedagógica desta coleção de ensino por competências.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

A metodologia de resolução de problemas descrita por George Polya nesse livro inspirou o modo de encaminhar o desenvolvimento dos assuntos abordados em cada volume desta coleção, bem como as etapas e os passos propostos na resolução de problemas. O livro fornece ferramentas essenciais para professores e estudantes.

POLYA, G. *Mathematical discovery on understanding, learning and teaching problem solving*. New York: John Wiley & Sons, 2009. 2 v.

O livro é destinado a estudantes e professores e indica estratégias, descritas também neste Manual, para a resolução de problemas, bem como reforça a importância da compreensão e do aprendizado durante tal processo. Para alcançar tal objetivo, o autor ressalta que é essencial a observação dos dados e das condições, assim como persistência e paciência.

SKOVSMOSE, O. *Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade*. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).

Nesse livro, é descrito, com base em ideias filosóficas e sociológicas, um cenário de questionamentos (de ordem não apenas teórica, como também prática) que envolvem fundamentos da Educação matemática crítica relacionados à ação pedagógica de professores. O livro foi referência bibliográfica para a elaboração do projeto didático desta coleção.

SOUZA, R. M. *O uso do GeoGebra no ensino da função quadrática*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2014.

Esse trabalho, norteado em uma metodologia de estudo de caso, é um estudo e pesquisa sobre o ensino das funções quadráticas com alunos do 1º ano do Ensino Médio utilizando-se o *software* livre GeoGebra. Além de servir como inspiração para o trabalho com GeoGebra nas seções *Tecnologias digitais* deste volume, essa obra também foi usada como referencial teórico para a metodologia na qual se baseia essa seção e para as sugestões de trabalho com ela, presentes no tópico *Sugestões para o desenvolvimento das aulas* deste Manual.

WING, J. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711/pdf>. Acesso em: 24 ago. 2020.

Esse artigo apresenta a tradução do trabalho *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. A tradução foi feita para o português por Cleverson Sebastião dos Anjos, professor da área de informática do Instituto Federal do Paraná. O texto discorre sobre o percurso de ideias relacionadas aos estudos dessa pesquisadora sobre o pensamento computacional e foi referência bibliográfica para a elaboração deste Manual e das propostas didáticas relacionadas a pensamento computacional dos seis volumes desta coleção.

ISBN: 978-65-5767-039-2



9 786557 670392